سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

عرض نظري و تمارين

05

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

****

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 01

مفاهيم أساسية في الميكانيك و الطاقة

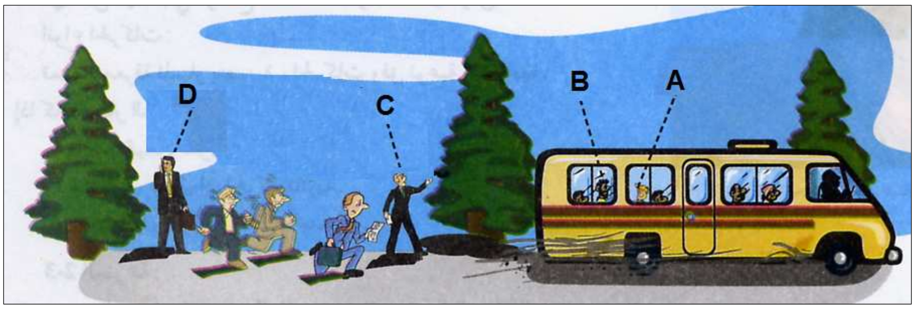
المرجع و المعلم

• نسبية الحركة :

- الحركة و السكون مفهومان نسبيان ، و لدراسة حركة أي جسم ، يقتضي اختيار مرجع تنسب إليه حركة هذا الجسم و هذا المرجع عادة ما يكون الأرض . أو جسم ساكن بالنسبة للأرض .

مثال :

يمثل الشكل التالي ، أربع مسافرين ، A ، B راكبين حافلة في حركة مستقيمة منتظمة ، و آخرين B و C ، واقفين على رصيف محطة المسافرين (الشكل) .

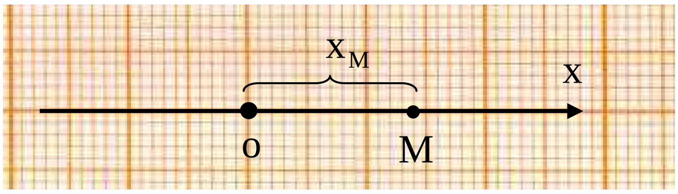


- نلاحظ أن كل مسافر يبدو متحركا و ساكنا في آن واحد ، نستنتج أن الحركة و السكون مفهومان نسبيان .
- عندما ننسب حركة أو سكون أي مسافر بالنسبة للشجرة ، مثلا لا يمكن للمسافر A أن يبدو في حالة سكون بالنسبة للشجرة عندما يكون في حالة حركة بالنسبة إليها ، و لا يمكن للمسافر C أن يكون متحركا بالنسبة للشجرة عندما

يكون ساكنا بالنسبة لها . نستنتج أنه لدراسة حركة أو سكون جسم يجب نسب هذا الجسم إلى جسم ثابت بالنسبة للأرض ، يسمى مرجع .

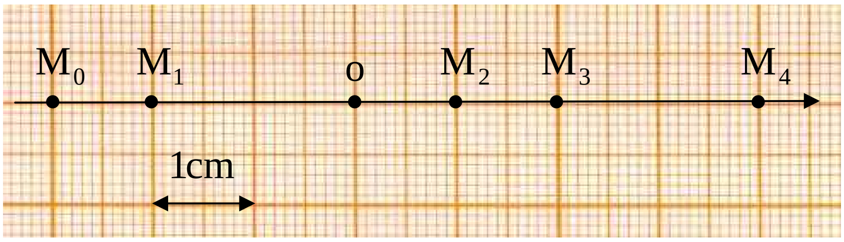
• معلم المسافة و الفاصلة :

- معلم المسافة هو معلم مرتبط بالمرجع ، يرتكز على نقطة ثابتة (O) تدعى مبدأ المعلم (أو مركز الإحداثيات) ، يستعمل هذا النوع من المعالم في تعيين موضع المتحرك عند كل لحظة زمنية ، و هو يوجد على ثلاث أنواع : فضائي ، مستوي ، خطي .
- فاصلة الموضع M لمتحرك على مسار مستقيم في معلم خطي يوازي هذا المسار، هو مقدار جبري يمثل بعد هذا الموضع عن مبدأ المعلم (الشكل) .



مثال :

يمثل الشكل التالي الأوضاع التي يشغلها متحرك خلال أزمنة متساوية .

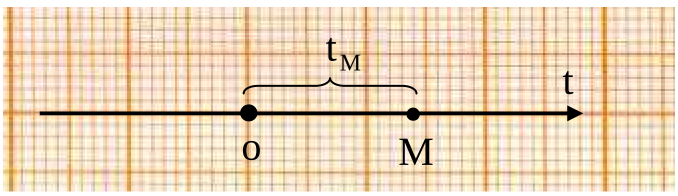


وفق تعريف الفاصلة ، تكون فواصل مواضع المتحرك M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 المبينة في الشكل بالاعتماد على سلم الرسم المرفق كما في الجدول التالي :

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
x (m)	- 3	- 2	+ 1	+ 2	+ 4

• معلم الأزمنة و اللحظة الزمنية :

- معلم الأزمنة هو معلم خطي موجه و موحد بوحدات زمنية ، مبدأه يكون كيفي و مختار .
- اللحظة الزمنية عند الموضع M هي مقدار جبري يمثل الفاصل الزمني بين لحظة بلوغ المتحرك النقطة M ، و مبدأ الأزمنة .

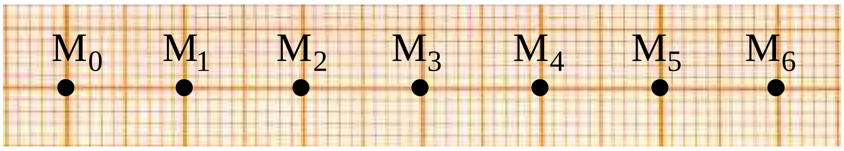


ملاحظة :

يمكن للحظة الزمنية أن تكون سالبة .

مثال :

يمثل الشكل التالي الأوضاع المتتالية التي يشغلها متحرك خلال أزمنة متساوية $\tau = 2\ s$.



يمثل الجدول التالي لحظات مرور المتحرك بالمواضع M_0 ، M_1 ، ...... ، M_6 باعتبار مبدأ الأزمنة لحظة مرور المتحرك بالموضع M_2 .

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
t (s)	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4

التمرين (1) :

جسم نقطي (S) يتحرك على مسار مستقيم ، يبدأ حركته من النقطة (A) باتجاه النقطة (B) ، فيقطع مسافة AB = 2 m ، بعد 2 s من بدأ حركته ، ثم مسافة BC = 3 m بعد 1s من مروره بالنقطة (B) باتجاه نقطة أخرى (C) .

- في معلم خطي منطبق على مسار الحركة أوجد فواصل النقاط (A) ، (B) ، (C) ، و كذا لحظة مرور المتحرك بهذه النقاط في الحالات التالية :

1- مبدأ الأزمنة و الفواصل عند النقطة (A) .

2- مبدأ الأزمنة و الفواصل عند النقطة (B) .

3- مبدأ الأزمنة عند النقطة (B) و مبدأ الفواصل عند النقطة (A) .

الأجوبة :

1)

	A	B	C
t (s)	0	2	3
x (m)	0	2	5

2)

	A	B	C
t (s)	-2	0	1
x (m)	-2	0	3

3)

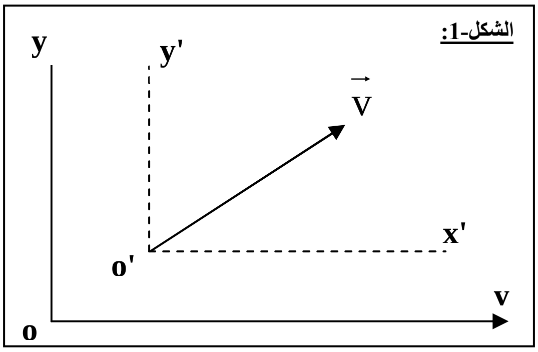
	A	B	C
t (s)	-2	0	1
x (m)	0	2	5

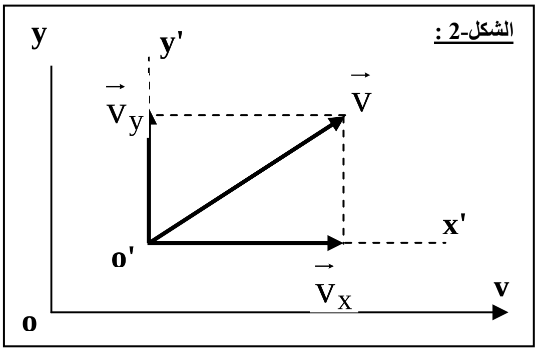
تحليل الأشعة

• كيفية تحليل شعاع إلى مركبتيه في معلم مستوي :

لتحليل شعاع و ليكن شعاع السرعة $\vec{v}$ إلى مركبتيه $\vec{v}_x$ وفق المحور ox و $\vec{v}_y$ وفق المحور oy نقوم بما يلي :

- نرسم مستقيمين مارين بمبدأ الشعاع $\vec{v}$ الأول (o'x') يوازي المحور (ox) و الثاني (o'y') يوازي المحور (oy) (الشكل-1) .
- نسقط عموديا الشعاع $\vec{v}$ على المستقيمين (o'x') ، (o'y') فنحصل على الشعاع $\vec{v}_x$ الذي يمثل مركبة الشعاع $\vec{v}$ على المحور (ox) و على الشعاع $\vec{v}_y$ الذي يمثل مركبة على الشعاع $\vec{v}$ المحور (oy) (الشكل-2)





ملاحظة :

إذا كان المعلم خطي ox يكون لأي شعاع و ليكن $\vec{v}$ مركبة واحدة $\vec{v}_x$ تكون منطبقة على الشعاع الأصلي $\vec{v}$ أي :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_x}$$

● القيمة الجبرية لمركبة شعاع :

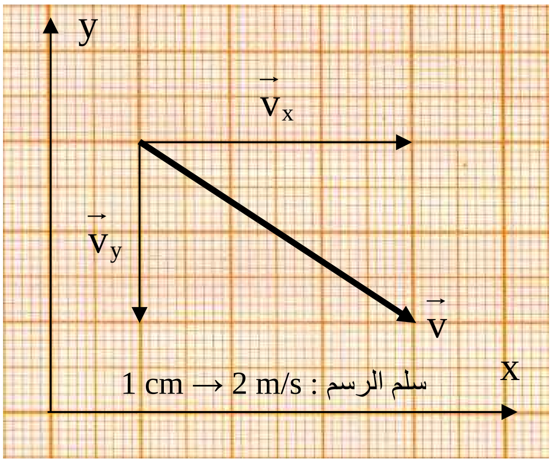
- القيمة الجبرية لمركبة شعاع وليكن $\vec{v}_x$ ، التي يرمز لها بـ v_x (بدون شعاع) ، هي مقدار جبري يمثل طويلة مركبة الشعاع بالموجب (+) عندما تكون مركبة الشعاع في الجهة الموجبة للمحور ، و طويلة مركبة الشعاع بالسالب (-) إذا كانت مركبة الشعاع في الجهة السالبة (-) للمحور (ox) ، أي :
- عندما يكون الشعاع $\vec{v}_x$ في جهة المحور ox يكون :

$$v_x = + \left\| \vec{v}_x \right\|$$

- عندما يكون الشعاع $\vec{v}_x$ عكس جهة المحور ox يكون :

$$v_x = - \left\| \vec{v}_x \right\|$$

مثال :



- مركبة شعاع السرعة على المحور ox في الجهة الموجبة للمحور ox و عليه يكون :

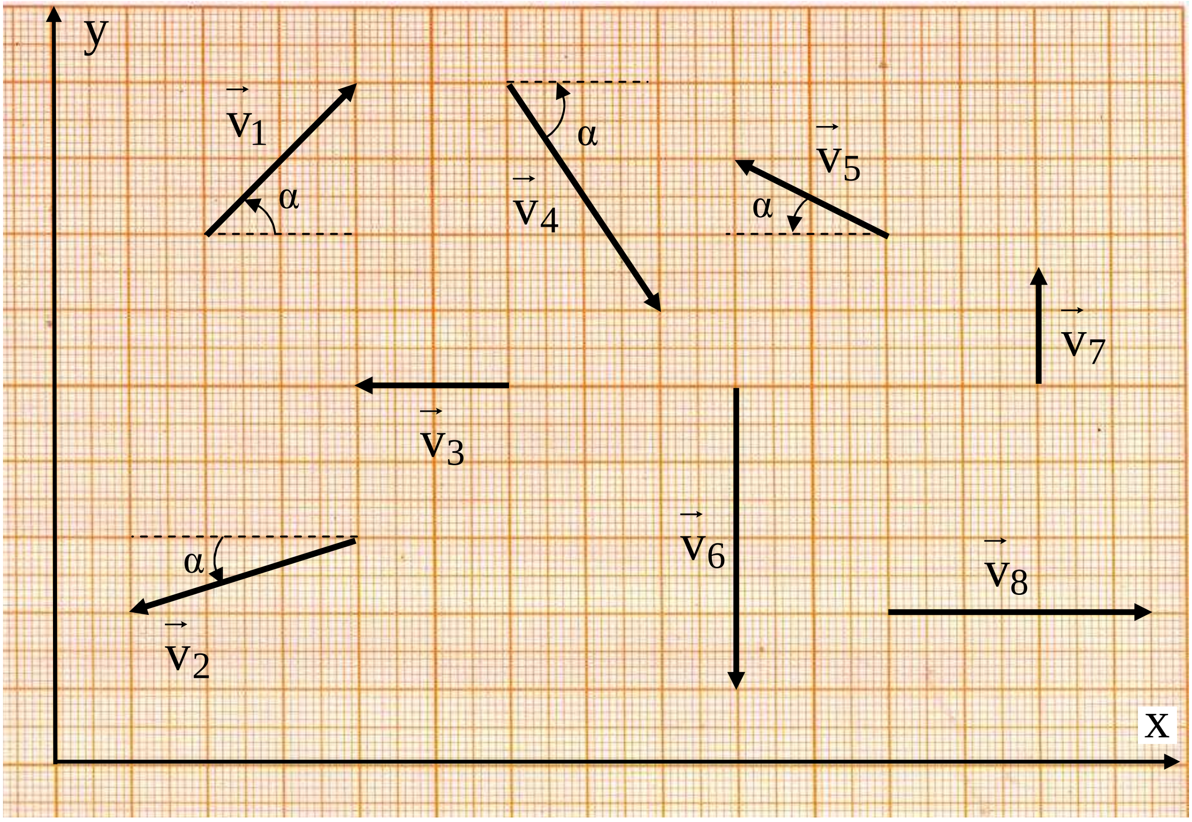
$$v_x = + \left\| \vec{v}_x \right\| = + (3 . 2) = + 6 \text{ m/s}$$

- مركبة شعاع السرعة على المحور oy في الجهة السالبة للمحور oy و عليه يكون :

$$v_y = - \left\| \vec{v}_y \right\| = - (2 . 2) = - 4 \text{ m/s}$$

التمرين (2) :

1- يمثل الشكل التالي أشعة للسرعة في معلم مستوي (o,x,y) :



1- من خلال هذا الشكل و اعتمادا على سلم السرعة : $1 \text{ cm} \to 2 \text{ m/s}$ أكتب عبارت أشعة السرعة على الشكل $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$.

2- عبر عن مركبتي كل شعاع بدلالة طويلة شعاع السرعة **v** و الزاوية α التي يصنعها شعاع السرعة مع المحور **ox** ,

الأجوبة :

1- كتابة عبارات أشعة السرعة على الشكل $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$:

$$\vec{v}_1 = + 4 \vec{i} + 4 \vec{j} \;,\; \vec{v}_2 = - 6 \vec{i} - 2 \vec{j} \;,\; \vec{v}_3 = - 4 \vec{i} \;,\; \vec{v}_4 = + 4 \vec{i} - 6 \vec{j}$$

$$\vec{v}_5 = - 4 \vec{i} + 2 \vec{j} \;,\; \vec{v}_6 = - 8 \vec{j} \;,\; \vec{v}_7 = + 3 \vec{j} \;,\; \vec{v}_8 = + 7 \vec{i} \;.$$

2- عبارتي v_x ، v_y بدلالة v ، α :

$$\vec{v}_1 \begin{cases} v_{1x} = +v_1 \cos\alpha \\ v_{1y} = +v_1 \sin\alpha \end{cases} \quad \vec{v}_2 \begin{cases} v_{2x} = -v_2 \cos\alpha \\ v_{2y} = -v_2 \sin\alpha \end{cases} \quad \vec{v}_3 \begin{cases} v_{3x} = -v_3 \\ v_{3y} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_4 \begin{cases} v_{4x} = +v_4 \cos\alpha \\ v_{4y} = -v_4 \sin\alpha \end{cases} \quad \vec{v}_5 \begin{cases} v_{5x} = -v_5 \cos\alpha \\ v_{5y} = +v_5 \sin\alpha \end{cases} \quad \vec{v}_6 \begin{cases} v_{6x} = 0 \\ v_{6y} = -v_6 \end{cases}$$

$$\vec{v}_7 \begin{cases} v_{7x} = +0 \\ v_{7y} = +v_7 \end{cases} \quad \vec{v}_8 \begin{cases} v_{8x} = +v_8 \\ v_{8y} = 0 \end{cases}$$

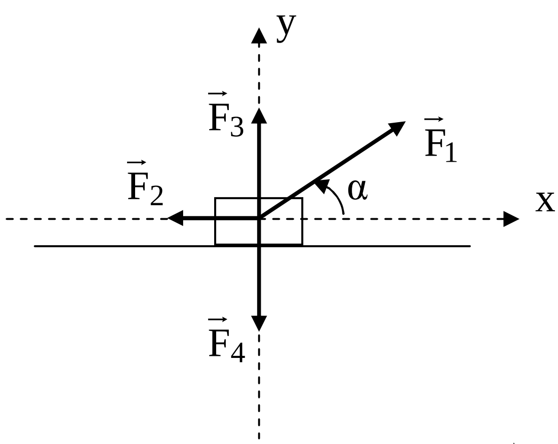
● **تحليل علاقة شعاعية بالنسبة في معلم مستوي :**

- يعتمد مبدأ تحليل علاقة شعاعية على مبدأ تحليل شعاع كما يلي :

$$\boxed{\vec{A} = \alpha\vec{B} \rightarrow A_x\vec{i} + A_y\vec{j} = \alpha B_x\vec{i} + \alpha B_y\vec{j} \rightarrow \begin{cases} A_x = \alpha B_x \\ A_y = \alpha B_y \end{cases}}$$

التمرين (3) :

نعتبر جسم (S) خاضع إلى تأثير مجموعة من القوى كما مبين في الشكل التالي :



حلل العلاقة الشعاعية التالية وفق المحورين ox ، oy :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = m\vec{a}$$

حيث m كتلة الجسم و الشعاع $\vec{a}$ هو شعاع يميز حركة الجسم .

الأجوبة :

- تحليل العلاقة الشعاعية :

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = m.a_x \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = m.a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1.\cos\alpha - F_2 + 0 + 0 = m.a_x \\ F_1.\sin\alpha + 0 + F_3 - F_4 = m.a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1.\cos\alpha - F_2 = m.a_x \\ F_1.\sin\alpha + F_3 - F_4 = m.a_y \end{cases}$$

المراجع الغاليلية

• نص مبدأ العطالة :

- مبدأ العطالة هو أحد القوانين الأساسية التي صاغها العالم نيوتن فهو ينص على ما يلي :

" يحافظ كل جسم على سكونه أو حركته المستقيمة المنتظمة إذا لم تتدخّل قوة لتغيير حالته الحركية".

▪ استنتاجات من مبدأ العطالة :

يمكن من خلال مبدأ العطالة قول ما يلي :

- إذا لم يخضع جسم إلى تأثير أي قوة يكون إما ساكنا أو في حركة مستقيمة منتظمة .
- إذا خضع جسم إلى تأثير قوة لا يكون ساكنا و لا في حركة مستقيمة منتظمة بمعنى يمكن أن يكون في حركة مستقيمة متسارعة أو في حركة مستقيمة متباطئة أو في حركة منحنية أو في حركة دائرية منتظمة......
- كل جسم ليس ساكنا و ليس في حركة مستقيمة منتظمة (مستقيمة متسارعة أو مستقيمة متباطئة أو منحنية) هو حتما خاضع إلى قوة .
- كل جسم في حركة مستقيمة منتظمة أو ساكنا يكون غير خاضع إلى أي قوة ، و إذا كان هذا الجسم خاضع إلى تأثير قوة معلومة و مؤكدة فهو حتما خاضع إلى قوة أخرى أو عدة قوى أخرى بحيث يكون في النهاية المجموع الشعاعي لكل القوى معدوم .

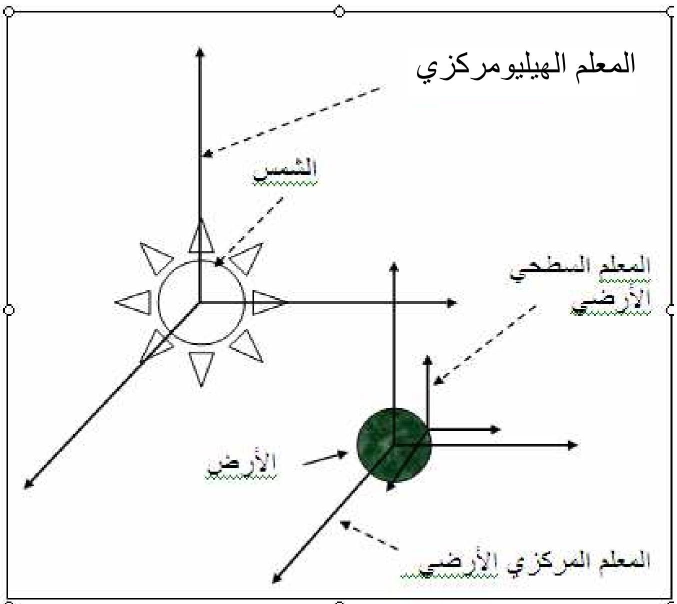
• تعريف المرجع الغاليلي :

- المرجع الغاليلي هو كل مرجع يتحقق فيه مبدأ العطالة ، و كل مرجع في إزاحة مستقيمة منتظمة مع مرجع غاليلي هو كذلك مرجع غاليلي .
- لتعريف المراجع الغاليلية نبحث عن مرجع ساكن أصلا ، لذلك اختير مركز الشمس الذي يعتبر ثابت بالنسبة لكل الأجسام الموجود في الفضاء .

• أمثلة عن المراجع الغاليلية :

المرجع الهيليو مركزي :

- مبدأ معلمه يكون منطبق على مركز الشمس ، و محاوره الثلاثة متجهة نحو نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لمركز الشمس (الشكل) .
- يعتبر المرجع الهيليومركزي غاليليا إلى حد كبير .
- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تتحرك حول الشمس كالأرض و بقية الكواكب .



المرجع المركزي الأرضي (المرجع الجيومركزي) :

- مبدأ معلمه يكون منطبق على مركز الأرض ومحاوره الثلاثة تكون متجهة نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لمركز الأرض (الشكل) .

- في الحقيقة إن المرجع المركزي الأرضي ليس غاليليا بالمعنى الدقيق ، لكون مبدأ معلمه له مسار إهليليجي حول الشمس ، غير أنه بالنسبة للتجارب التي تدوم وقتا قصيرا مقارنة مع مدة دوران مركز الأرض حول الشمس يمكن اعتبار هذا المرجع غاليلي إذ أن حركة مركز الأرض حول الشمس في هذا المجال الزمني (زمن التجربة القصير) تكون مستقيمة منتظمة تقريبا مع المرجع الهيليومركزي الغاليلي .

- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تتحرك حول الأرض ، مثل الأقمار الاصطناعية .

المرجع السطحي الأرضي :

- مبدأ معلمه يكون منطبق على نقطة من سطح الأرض ومحاوره الثلاثة تكون متجهة نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لنقطة من سطح الأرض (الشكل) .

- في الحقيقة إن المرجع السطحي الأرضي ليس غاليليا بالمعنى الدقيق ، لكون مبدأ معلمه له مسار دائري بسبب دوران الأرض حول نفسها ، غير أنه بالنسبة للتجارب التي تدوم وقتا قصير مقارنة مع مدة دوران الأرض حول نفسها يمكن اعتبار هذا المرجع غاليلي إذ أن حركة مركز الأرض حول نفسها في هذا المجال الزمني (زمن التجربة القصير) تكون مستقيمة منتظمة تقريبا مع المرجع الهيليومركزي الغاليلي .

- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تتم على الأرض مثل حركة قذيفة ، حركة جسم على مستوي مائل ، حركة نواس ....

التمرين (4) :

1- هل مبدأ العطالة محقق في الحالات التالية :

أ- جسم (S) خاضع إلى قوة و هو في حركة مستقيمة منتظمة .

ب- جسم (S) خاضع إلى قوة و هو في حركة مستقيمة متسارعة بانتظام .

جـ- جسم (S) غير خاضع إلى أي قوة ، و هو في حركة مستقيمة متباطئة بانتظام .

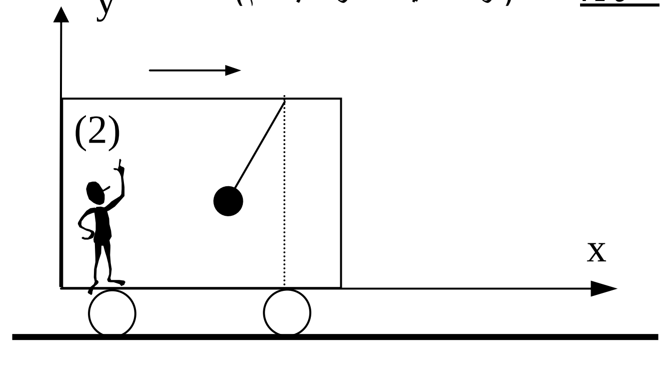
2- في نقطة من سقف عربة نعلق خيط ينتهي كرية صغيرة (b) . تنطلق العربة بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام ، نلاحظ انحرف الخيط عن المحور الشاقولي بزاوية α ، مما يدل على أن الكرية (b) خاضعة إلى تأثير ميكانيكي أدى بها إلى انزياح الخيط عن الشاقول .

نعتبر المرجعين التاليين :

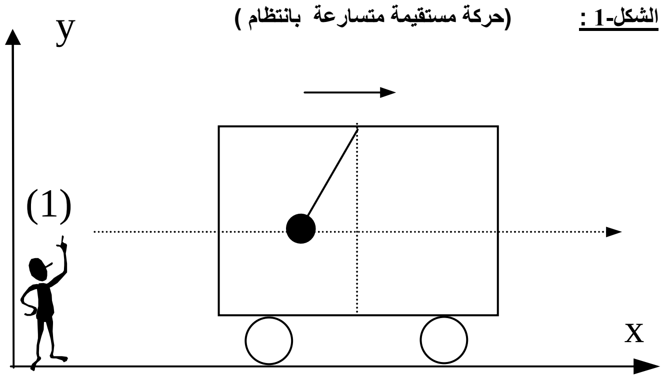
- مرجع (1) : مرتبط بالأرض (الشكل-1) .

- مرجع (2) : مرتبط بالعربة (الشكل-2) .

الشكل-2 : (حركة مستقيمة متسارعة بانتظام)



الشكل-1 : (حركة مستقيمة متسارعة بانتظام)



أ- كيف تبدو الكرية (b) بالنسبة لملاحظ مرتبط بالمرجع (1) ، و كيف تبدو بالنسبة لملاحظ مرتبط بالمرجع (2) .
ب- هل المرجع (1) غاليلي أم لا ، و كذلك المرجع (2) . علل .
3- هل يكون المرجع (2) غاليلي إذا أصبحت حركة العربة مستقيمة منتظمة . كيف يكون الخيط في هذه الحالة ؟

الأجوبة :

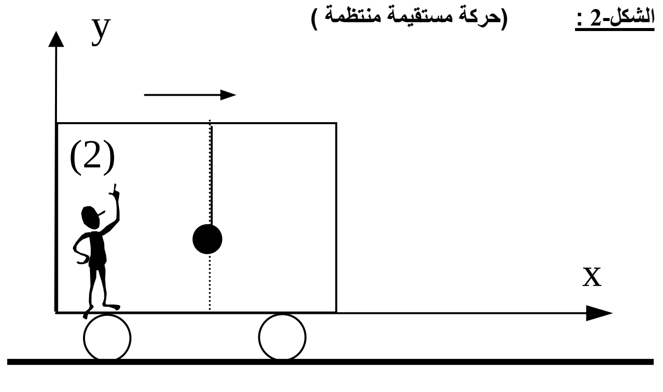
1- تحقق مبدأ العطالة :

يكون مبدأ العطالة محقق في الحالتين :
- جسم غير خاضع إلى أي قوة و يكون ساكن أو في حركة مستقيمة منتظمة .
- جسم خاضع إلى قوة و لا يكون في حركة مستقيمة منتظمة (مستقيمة متسارعة ، مستقيمة متباطئة ، منحنية ، دائرية) و على هذا الأساس يكون :
(الحالة- أ) ← مبدأ العطالة غير محقق .
(الحالة- ب) ← مبدأ العطالة محقق .
(الحالة- جـ) ← مبدأ العطالة غير محقق .

2-أ- تبدوا الكرية في حركة مستقيمة متسارعة (نفس حركة العربة) بالنسبة لملاحظ مرتبط بالمرجع (1) في حين تبدوا ساكنة بالنسبة لملاحظ مرتبط بالمرجع (2) .

ب- المرجع (1) غاليلي لأن مبدأ العطالة فيه محقق حيث تبدوا الكرية في حركة مستقيمة متسارعة (حركة العربة) و هي خاضعة إلى تأثير ميكانيكي (قوة) أدى إلى انزياح الخيط مع الكرية ، أما المرجع (2) ليس غاليلي لأن مبدأ العطالة فيه غير محقق إذا تبدوا الكرية ساكنة و هي خاضعة إلى تأثير ميكانيكي (قوة) أدى إلى انزياح الخيط مع الكرية .

الشكل-2 : (حركة مستقيمة منتظمة)



3- إذا أصبحت حركة العربة مستقيمة منتظمة يكون المرجع (2) غاليلي لأنه أصبح في حركة مستقيمة منتظمة مع المرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليلي ، و الخيط في هذه الحالة يكون شاقوليا كما لو كانت العربة متوقفة .

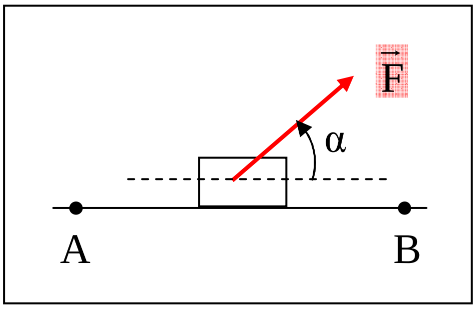
العمل و الطاقة

● عمل قوة ثابتة :

- نقول عن قوة أنها قامت بعمل إذا انتقلت نقطة تطبيقها من موضع إلى موضع آخر .

- عمل قوة $\vec{F}$ أثناء انتقال من موضع A إلى موضع B الذي يرمز له بـ $W_{AB}(\vec{F})$ وو حدته الجول هو مقدار جبري يكون موجب إذا كانت القوة $\vec{F}$ في جهة الحركة و يقال عنه **عمل محرك** بينما يكون سالبا إذا كانت القوة $\vec{F}$ معاكسة لجهة الحركة و يقال عنه في هذه الحالة **عمل مقاوم** .

- عمل قوة $\vec{F}$ ثابتة عندما تنتقل نقطة تطبيقها وفق مسار مستقيم AB هو الجداء السلمي بين شعاع القوة $\vec{F}$ و شعاع الإنتقال $\overrightarrow{AB}$ أي :

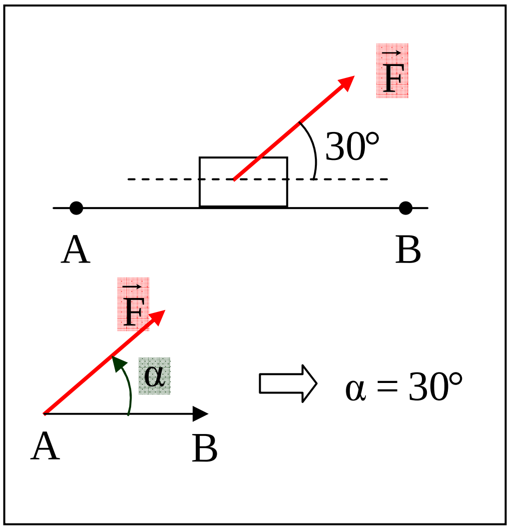


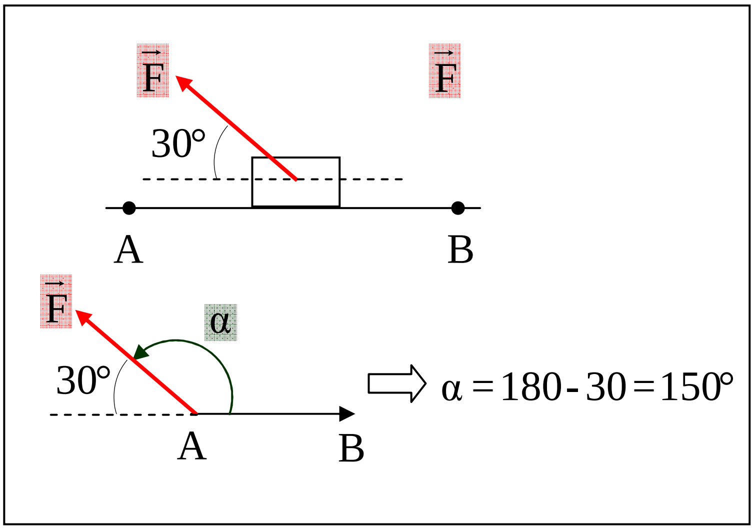
$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

و هذا العلاقة تكافئ العلاقة التالية :

$$W_{AB}(\vec{F}) = F\ AB \cos\alpha$$

حيث α هي الزاوية التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{AB}$ مع شعاع القوة $\vec{F}$ ، كما مبين في المثالين التاليين :

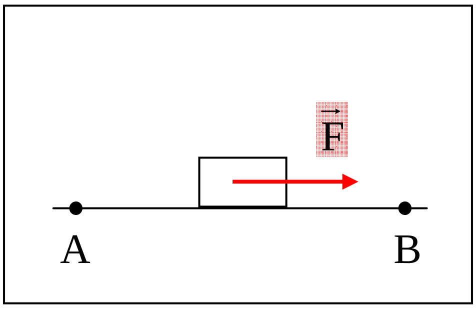




- تقدر المسافة AB بالمتر (m) و شدة القوة $\vec{F}$ بالنيوتن (N) و العمل W بالجول (J) .

حالات خاصة :

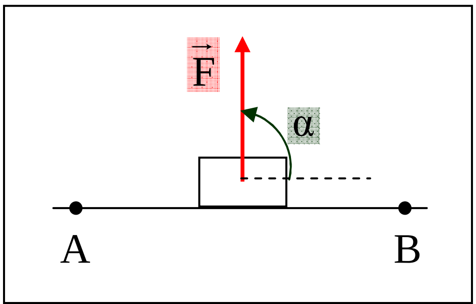
▪ القوة $\vec{F}$ توازي شعاع الإنتقال و في جهة حركته :



- في هذه الحالة يكون : $\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 1$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$W_{AB}(\vec{F}) = F\ AB$$

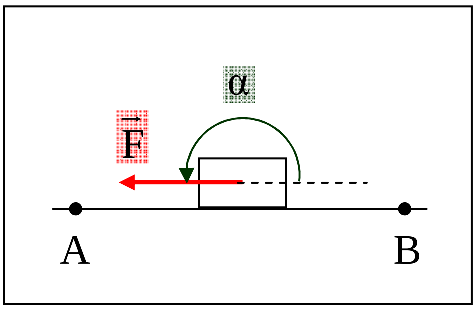
▪ القوة $\vec{F}$ عمودية على شعاع الانتقال :



- في هذه الحالة يكون : $\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha = 0$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$W_{AB}(\vec{F}) = 0$$

▪ القوة $\vec{F}$ توازي شعاع الانتقال و معاكسة لجهة حركته :



- في هذه الحالة يكون : $\alpha = \pi \rightarrow \cos\alpha = -1$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$W_{AB}(\vec{F}) = -\ F\ AB$$

ملاحظة :

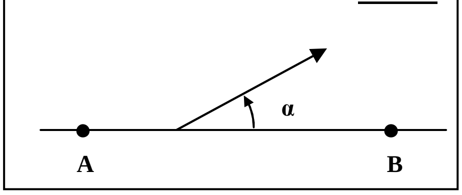
عمل قوة $\vec{F}$ أثناء انتقال من موضع A إلى الموضع B مرورا بمواضع أخرى A_1 ، A_2 ، ..... A_n مساوي لمجموع الأعمال لكل الانتقالات أي :

$$W_{AB}(\vec{F}) = W_{AA_1}(\vec{F}) + W_{A_1A_2}(\vec{F}) + W_{A_2A_3}(\vec{F}) + \ldots\ldots + W_{A_nB}(\vec{F})$$

التمرين (5) :

يتحرك جسم M كتلته m ، أفقيا من موضع A إلى موضع B على مسار مستقيم تحت تأثير قوة $\vec{F}$ تصنع زاوية α مع شعاع الانتقال شدتها $F = 20$ N (الشكل-1) . أحسب عمل القوة $\vec{F}$ عندما ينتقل الجسم M مسافة $d = 5$ m من الموضع A إلى الموضع B في الحالات التالية :

الشكل-1 :



1- القوة $\vec{F}$ تصنع زاوية $\alpha = 60^0$ مع شعاع الانتقال في الإتجاه الموافق لجهة الحركة .

2- القوة $\vec{F}$ موازية للمسار و في جهة الحركة .

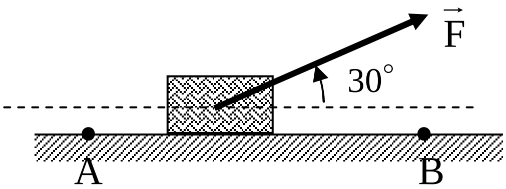
3- القوة $\vec{F}$ موازية للمسار و معاكسة لجهة الحركة .

4- القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار .

الأجوبة :

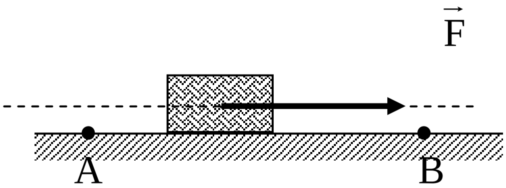
▪ عمل القوة $\vec{F}$:

1- القوة $\vec{F}$ تصنع الزاوية $\alpha = 60°$ في جهة الحركة :



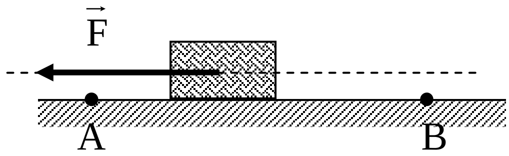
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = F\,.\,AB\cos 60°$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = 20\,.\,5\,.\,0.5 = 50\ J$$

2- القوة $\vec{F}$ موازية للمسار و في جهة الحركة :



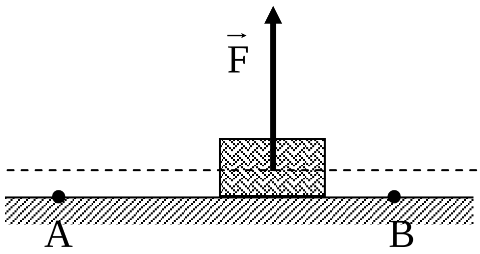
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = F\,.\,AB$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = 20\,.\,5 = 100\ J$$

3- القوة $\vec{F}$ موازية للمسار و معاكسة لجهة الحركة :



$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = -F.AB$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = -20.5 = -100\ J$$

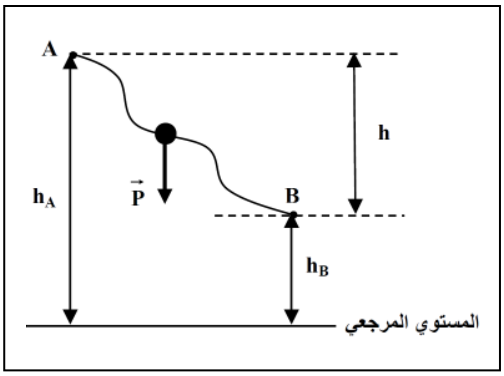
4- القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار :



$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = 0$$

● عمل قوة الثقل :

عندما ينتقل مركز ثقل جسم من نقطة A الموجودة على ارتفاع z_A في معلم معين إلى نقطة B الموجودة على ارتفاع z_B في نفس المعلم ، فإن عمل ثقل هذا الجسم أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B يعبر عنه بالعلاقة :



$$\boxed{W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = m.g\,(z_A - z_B)}$$

أو بإحدى العلاقتين :

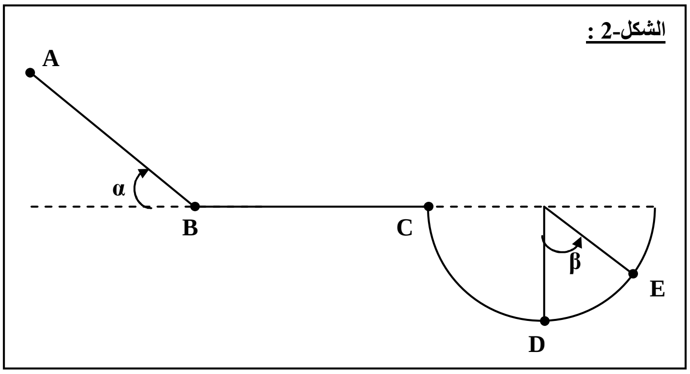
$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = +m.g.h$ (عمل الثقل محرك ، الجسم نازل)
$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = -m.g.h$ (عمل الثقل مقاوم ، الجسم صاعد)

ملاحظة :

عمل الثقل لا يتعلق بالمسار و إنما يتعلق بالموضعين الإبتدائي و النهائي فقط .

التمرين (6) :

يتحرك جسم (S) كتلته $m = 2\ kg$ بدون احتكاك على المسار ABCDEF الموضح في (الشكل-2) التالي :



1- أحسب عمل قوة الثقل في الحالات التالية :
- عند الانتقال من الموضع A إلى الموضع B .
- عند الانتقال من الموضع B إلى الموضع C .
- عند الانتقال من الموضع C إلى الموضع D .
- عند الانتقال من الموضع D إلى الموضع E .

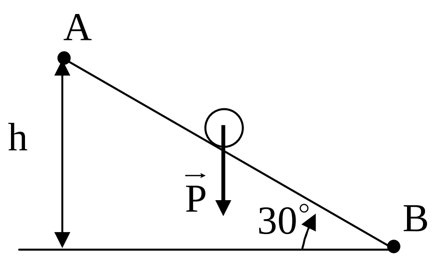
2- استنتج عمل الثقل أثناء الإنتقال من الموضع A إلى الموضع E .

يؤخذ : $AB = 10\ m$ ، $R = 8\ m$ ، $g = 10\ N/m$ ، $\alpha = 30°$ ، $\beta = 60°$.

الأجوبة :

1- عمل الثقل :

- الانتقال $(A \rightarrow B)$:



$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = m\,g\,h$$

من الشكل :

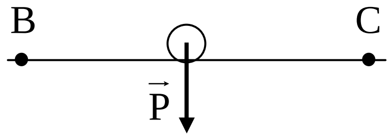
$$\sin\alpha = \frac{h}{AB} \rightarrow h = AB\sin\alpha$$

و منه :

$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = m\,g\,AB\sin\alpha$$

$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = 2\,.\,10\,.\,10\,.\sin30° = 100\ J$$

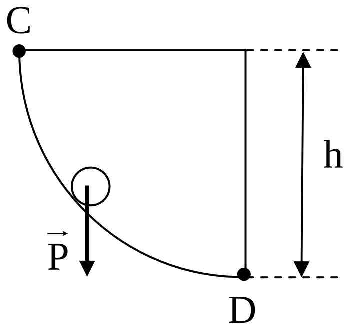
▪ الانتقال $(B \rightarrow C)$:



في هذه الحالة قوة الثقل $\vec{P}$ عمودية على شعاع الانتقال و بالتالي يكون :

$$W_{B\text{-}C}(\vec{P}) = 0$$

▪ الانتقال $(C \rightarrow D)$:



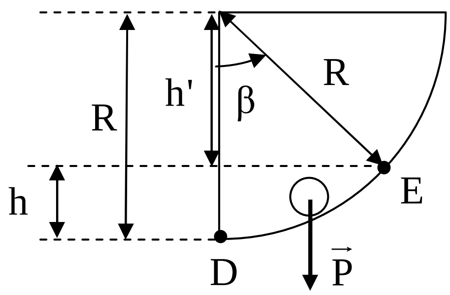
$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = m\,g\,h$$

من الشكل : $h = R$ و منه :

$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = m\,g\,R$$

$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = 2.10.8 = 160\text{ J}$$

▪ الانتقال $(D \rightarrow E)$:



$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -\,m\,g\,h$$

من الشكل :

$$\begin{cases} h = R - h' \\ \cos\beta = \dfrac{h'}{R} \rightarrow h' = R\cos\beta \rightarrow h = R - R\cos\beta \rightarrow h = R\,(1-\cos\beta) \end{cases}$$

و منه تصبح عبارة عمل الثقل :

$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -\,m\,g\,R\,(1-\cos\beta)$$

$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -2.\,10.\,8\,\,(1-\cos60^\circ) = -80\text{ J}$$

• الطاقة الحركية الانسحابية :

- عندما ينسحب جسم ذو كتلة m بسرعة v فإن طاقته الحركية Ec مقدرة بالجول عند كل لحظة تعطى بالعبارة التالية :

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2} mv^2}$$

ملاحظة :

الطاقة الحركية لجملة تتكون من عدة أجسام (S_1) ، (S_2) ..... مساوية لمجموع الطاقات الحركية لهذه الأجسام أي :

$$\boxed{E_C = E_C(S_1) + E_C(S_2) + \ldots\ldots\ldots}$$

• معادلة انحفاظ الطاقة في الجملة الميكانيكية :

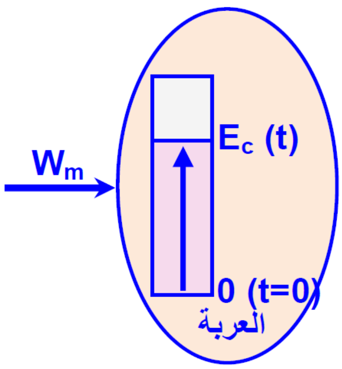
إذا كانت طاقة جملة ميكانيكية الابتدائية هي E_1 ثم حدث تغير في طاقتها بسبيل ميكانيكي W_m لتصبح E_2 .

يمكن كتابة معادلة انحفاظ الطاقة كما يلي :

$$E_1 + W_m = E_2$$

W_m يمثل مجموع أعمال القوى الخارجية أي : $W_m = \sum W(\vec{F}_{ext})$ و منه يمكن كتابة معادلة انحفاظ الطاقة كما يلي :

$$\boxed{E_1 + \sum W(\vec{F}_{ext}) = E_2}$$



التمرين (7) :

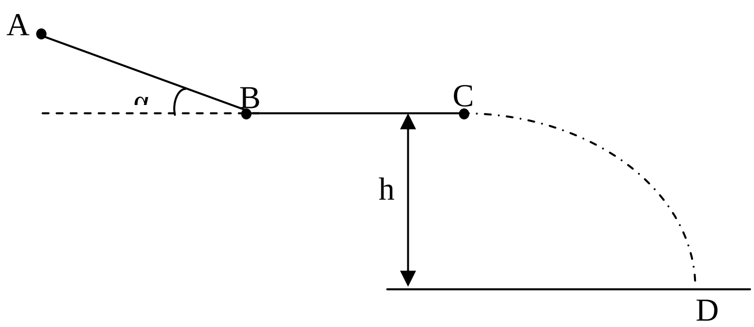
جسم (S) نعتبره نقطي (أبعاده مهملة) كتلته m = 1 Kg يتحرك على المسار ABCD (الشكل) حيث :

AB : مستوى مائل طوله AB = 2 m و يميل على الأفق بزاوية α = 30° به الاحتكاك مهمل .

BC : مسار مستقيم أفقي طوله BC = 2 m

يخضع الجسم (S) على المسار BC لقوة احتكاك $\vec{f}$ شدتها ثابتة .

يندفع الجسم (S) من الموضع (A) بسرعة ابتدائية قدرها $v_A = 4\ m/s$. يعطى : $g = 10\ m/s^2$.



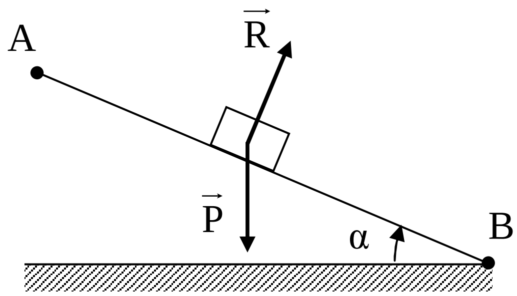
1 – أحسب سرعة الجسم (S) عند الموضع (B) أسفل المستوي المائل .

2 – إذا علمت أن الجسم (S) يصل إلى الموضع C بسرعة قدرها 4 m/s ، أوجد شدة قوة الاحتكاك f .

3 – عند وصول الجسم (S) إلى النقطة C التي تبعد عن سطح الأرض بمقدار h = 1.65 m ، يندفع الجسم في الهواء و يسقط تحت تأثير ثقله حتى يصطدم بالأرض في الموضع D . أحسب سرعة الجسم (S) عند الموضع (D) (تهمل كل قوى الاحتكاك و دافعة أرخميدس) .

الأجوبة :

1- السرعة v_B عند B :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{A-B}(\vec{P}) + W_{A-B}(\vec{R}) = E_{CB}$$

- $E_{CA} = \frac{1}{2} m\, v_A^2$
- $W_{A-B}(\vec{P}) = m\,g\,h = m\,g\,AB\sin\alpha$
- $W_{A-B}(\vec{R}) = 0 \qquad (\vec{R} \perp \overrightarrow{AB})$
- $E_{CB} = \frac{1}{2} m\, v_B^2$

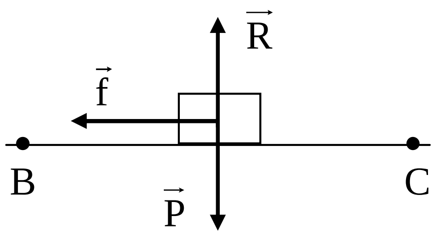
$$\frac{1}{2} m\, v_A^2 + m\,g\,AB\sin\alpha = \frac{1}{2} m\, v_B^2$$

$$\frac{1}{2} v_A^2 + g\,AB\sin\alpha = \frac{1}{2} v_B^2$$

$$v_A^2 + 2\,g\,AB\sin\alpha = v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2\,g\,AB\sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{(4)^2 + (2\ .10\,.\,2\ .\ 0.5)} = 6\ \text{m/s}$$

2- قيمة f :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين B و C :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CB} + W_{B\text{-}C}(\vec{P}) + W_{B\text{-}C}(\vec{R}) + W_{B\text{-}C}(\vec{f}) = E_{CC}$$

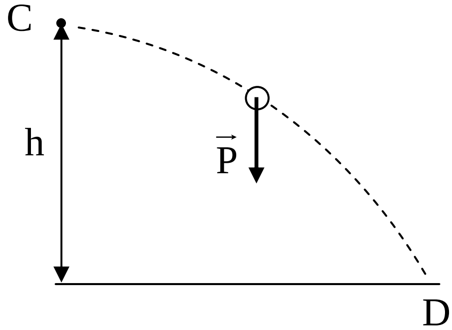
$$\frac{1}{2} m\, v_B^{\,2} + 0 + 0 - f\ BC = \frac{1}{2} m\, v_C^{\,2}$$

$$m\, v_B^{\,2} - 2\, f\ BC = m\, v_C^{\,2}$$

$$m\, v_B^{\,2} - m\, v_C^{\,2} = 2\, f\ BC \rightarrow f = \frac{m\,(v_B^{\,2} - v_C^{\,2})}{2.BC}$$

$$f = \frac{1(6^2 - 4^2)}{2.2} = 5\ N$$

3- سرعة الجسم (S) عند اصدامه بالأرض :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين C و D حيث :

$$E_C + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_D$$

$$E_{CC} + W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = E_{CD}$$

$$\frac{1}{2} m\, v_C^{\,2} + m\, g\, h = \frac{1}{2} m\, v_D^{\,2}$$

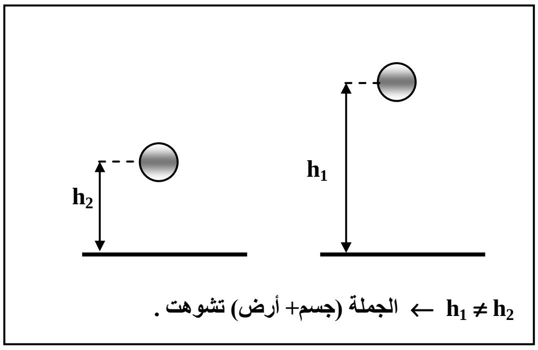
$$v_C^{\,2} + 2\, g\, h = v_D^{\,2} \rightarrow v_D = \sqrt{v_C^{\,2} + 2\, g\, h}$$

$$v_D = \sqrt{(4)^2 + 2\ .10.1.65} = 7\ m/s$$

• الجملة القابلة للتشوه و الطاقة الكامنة

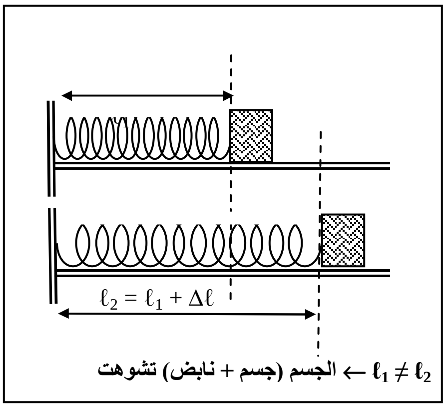
- نقول عن جملة أنها قابلة للتشوه ، إذا تغيرت المسافة بين مختلف أجزائها و مختلف النقاط المادية المكونة لها ، و بتشوه الجملة تكتسب هذه الأخيرة طاقة تدعى طاقة كامنة يرمز لها بـ E_P و وحدتها الجول (J) .
- أهم الجمل الميكانيكية القابلة للتشوه و التي ستكون محول الدراسة في برنامجنا هي :

الجملة (جسم + أر ض) :



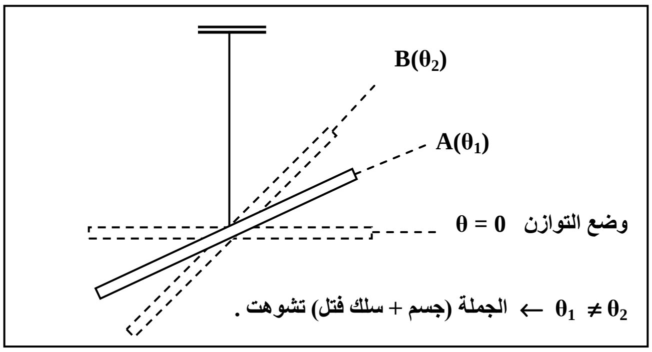
- تتشوه الجملة (جسم + أرض) إذا تغير البعد بين الجسم و الأرض .
- عندما تتشوه الجملة (جسم + أرض) تخزن طاقة كامنة ثقالية يرمز لها بـ E_{PP} .

الجملة (جسم + نابض)



- تتشوه الجملة (جسم + نابض) عندما يتغير طول النابض (استطالة أو انضغاط) .
- عندما تتشوه الجملة (جسم + نابض) تخزن طاقة كامنة مرونية يرمز لها بـ E_{Pe} .

الجملة (جسم + سلك فتل)



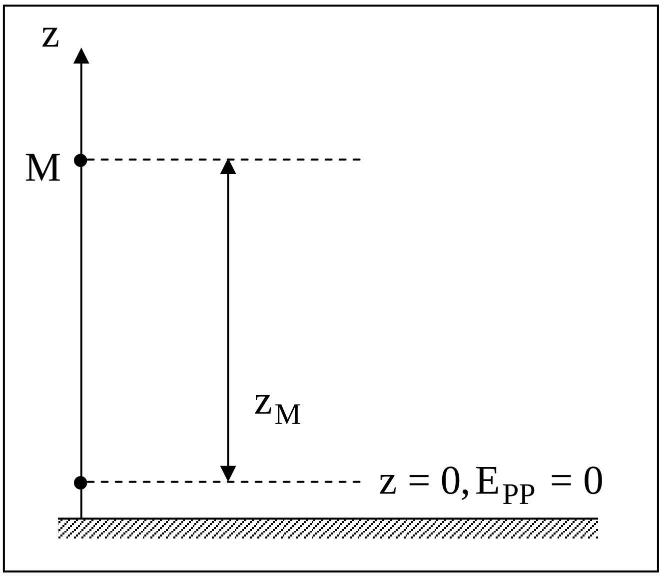
- تتشوه الجملة (جسم + سلك فتل) عندما يفتل السلك بزاوية معينة θ .
- عندما تتشوه الجملة (جسم + سلك فتل) تخزن طاقة كامنة فتلية θ يرمز لها بـ E_{Pe} .

ملاحظة :

- في الحقيقة الطاقة الكامنة لجملة مادية هي مقدار موجب ، لكننا نتعامل معها كمقدار جبري ، تقاس بالنسبة لمرجع نعتبر عنده الطاقة الكامنة معدومة . علما أن التغير في الطاقة الكامنة لا يتغير بتغير المرجع .
- بالنسبة للطاقة الكامنة المرونية و الطاقة الكامنة الفتلية عادة نعتبر وضع التوازن مرجعا لحساب الطاقة الكامنة المرونية $(x = 0)$ و الطاقة الكامنة الفتلية $(\theta = 0)$.

● عبارة الطاقة الكامنة الثقالية :

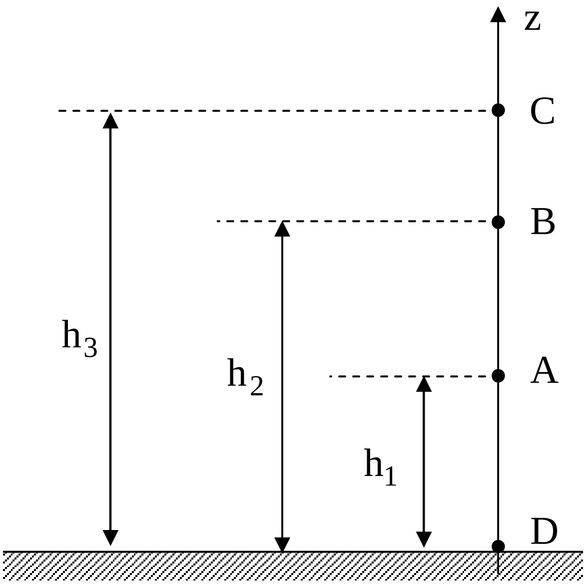
عندما يكون جسم (S) على ارتفاع z من مستوي مرجعي فإن الجملة (جسم S + أرض) تمتلك طاقة كامنة ثقالية يعبر عنها بالعلاقة :



$$\boxed{E_{pp} = m.g.z}$$

التمرين (8) :

من موضع A يقع على ارتفاع $h_1 = 1.2\ m$ من سطح الأرض ، يقذف طفل كرة كتلتها $m = 400\ g$ شاقوليا نحو الأعلى بسرعة $v_A = 4\ m/s$ ، تمر بالموضع B الذي يرتفع عن سطح الأرض بمقدار $h_2 = 1.5\ m$ ، ثم بالموضع C التي يبعد عن سطح الأرض بمقدار h_3 و الذي تغير فيه الكرة جهة حركتها راجعة باتجاه الأرض ، تمر مرة ثانية من موضع القذف A لتسقط في النهاية على سطح الأرض في الموضع D .



1- أحسب الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (كرة + أرض) عند المواضع A ، B ، D باعتبار الوضع المرجعي لحساب الطاقة الكامنة :

أ- منطبق على الأرض .

ب- منطبق على المستوي الأفقي المار من النقطة A .

(نعتبر $g = 10\ m/s^2$) .

2- نعتبر الجملة (كرة + أرض) كما نعتبر المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة منطبق على سطح الأرض . بإهمال تأثير الهواء على الكرة و بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة أوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض .

الأجوبة :

1- حساب الطاقة الكامنة :

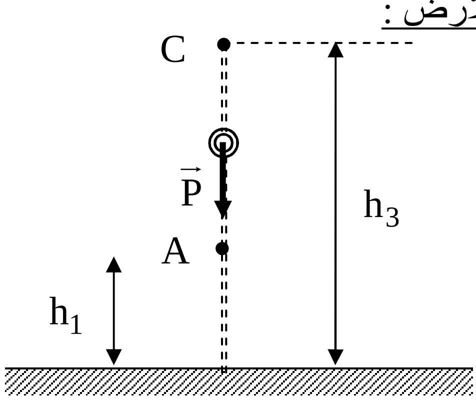
أ- المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة يكون منطبق على سطح الأرض (مار من D) :

- $E_{PPA} = m\, g\, z_A = m\, g\, h_1 = 0.4 \,.\, 10 \,.\, 1.2 = 4.8\ J$
- $E_{PPB} = m\, g\, z_B = m\, g\, h_2 = 0.4 \,.\, 10 \,.\, 1.5 = 6\ J$
- $E_{PPD} = m\, g\, z_D = 0$ (المستوى المرجعي)

ب- المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة يكون مار من A:

- $E_{PPA} = m\, g\, z_A = 0$ (المستوي المرجعي)
- $E_{PPB} = m\, g\, z_B = m\, g\, (h_2 - h_1) = 0.4 \,.\, 10 \,.\, (1.5 - 1.2) = 1.2\ J$
- $E_{PPD} = m\, g\, z_D = m\, g\, (- h_1) = 0.4 \,.\, 10 \,.\, (-1.2) = - 4.8\ J$

2- أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض :



- الجملة المدروسة : (كرة + أرض) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- لا توجد قوى خارجية مؤثرة على الجملة .
- نعتبر سطح الأرض مرجعا لحساب الطاقة الكامنة الثقالية .
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضع A و الموضع C حيث A موضع القذف و C موضع الكرة عند بلوغها أقصى ارتفاع .

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_C$$

$$E_{CA} + E_{PPA} + 0 = E_{CC} + E_{PPC}$$

- $E_{CA} = \frac{1}{2} m\, v_A{}^2$
- $E_{PPA} = m\, g\, h_1$
- $E_{CC} = 0 \qquad (v_C = 0)$
- $E_{PPC} = m\, g\, h_3$

يصبح لدينا :

$$\frac{1}{2} m\, v_A{}^2 + m\, g\, h_1 = 0 + m\, g\, h_3$$

$$\frac{1}{2} v_A{}^2 + g\, h_1 = 0 + g\, h_3$$

$$v_A{}^2 + 2\,g\,h_1 = 2\,g\,h_3$$

$$h_3 = \frac{v_A{}^2 + 2\,g\,h_1}{2\,g}$$

$$h_3 = \frac{(4)^2 + 2.10.1.2}{2\,.\,10} = 2\,\mathrm{m}$$

سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

05

عرض نظري و تمارين

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

****

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

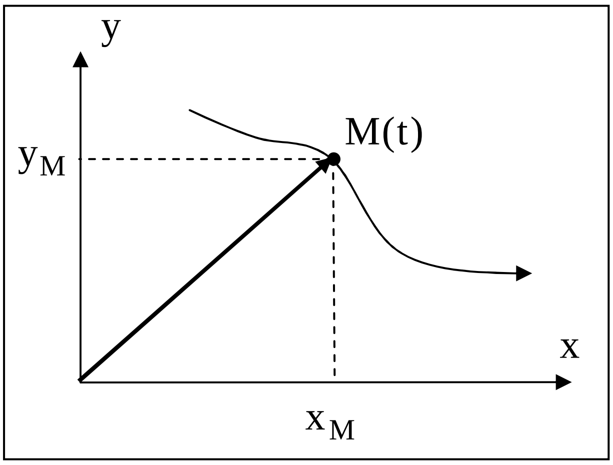
المحتوى المفاهيمي : 02

الدراسة العامة للحركة

شعاع التسارع و المعادلات الزمنية للحركة

• شعاع الموضع – الإحداثيات الكارتيزية:

- تجري دراسة الحركة في معالم ثابتة قد تكون هذه المعالم فضائية أو مستوية أو خطية ، و ذلك حسب ما تقتضيه نوع كل حركة .
- إذا اعتبرنا الدراسة في معلم مستوي كما في (الشكل) التالي :



فإن موضع المتحرك (M) في اللحظة الزمنية (t) يتعين بشعاع يسمى شعاع الموضع ، يرمز لـه بـ $\vec{r}$ و هو يعطى بالعلاقة الشعاعية التالية :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

- تسمى المقادير الجبرية x ، y **بالإحداثيات الديكارتية** لشعاع الموضع $\vec{r}$.
- إذا كانت النقطة المادية (M) ثابتة تكون الإحداثيات الديكارتية x ، y مستقلة عن الزمن (ثابتة) .
- إذا كانت النقطة المادية (M) في حالة حركة تكون الإحداثيات الديكارتية x ، y دوال في الزمن (ذات المتغير t) .

و تكتب في هذه الحالة الإحداثيات x ، y على شكل دوال ذات المتغير t كما يلي :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

تسمى هذه العلاقات الزمنية و التي تعبر عن الإحداثيات الكارتيزية بدلالة الزمن **بالمعادلات الزمنية** للحركة .

- المسار هو مجموعة النقط التي يشغلها المتحرك في كل لحظة ، و عند إيجاد علاقة تربط بين الإحداثيات الديكارتية للمتحرك نحصل على ما يسمى **معادلة المسار** ، نذكر بما يلي :

- معادلة مستقيم من الشكل : $y = ax + b$.
- معادلة قطع مكافيء : $y = ax^2 + b$.

• شعاع الانتقال :

- إذا انتقلت النقطة المادية من الموضع M_1 عند اللحظة t_1 أين يكون شعاع موضعها $\vec{r}_1$ إلى الموضع M_2 عند اللحظة t_2 أين يكون شعاع موضعها $\vec{r}_2$ فإنه يعبر عن هذا الانتقال بشعاع يدعى **شعاع الانتقال** $\overrightarrow{\Delta r}$ يساوي التغير في شعاع الموضع بين اللحظتين t_1 ، t_2 و يكون :

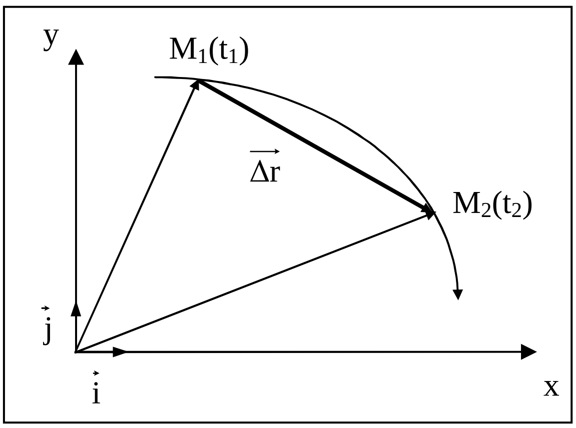
$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$$

و إذا كان : $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ ، $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ يكون :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{\Delta r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$

- تكون جهة شعاع الإنتقال في نفس جهة الحركة كما موضح في (الشكل) .
- في حالة مسار مستقيم يكون شعاع الإنتقال محمولا على المسار .

مثال :



• شعاع السرعة :

- شعاع السرعة المتوسطة الذي يرمز له بـ $\vec{v}_m$ بين لحظتين t_1 ، t_2 هو النسبة بين شعاع الإنتقال $\overrightarrow{\Delta r}$ بين هاتين اللحظتين و المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ أي :

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}}$$

عندما يؤول Δt نحو الصفر ، ينتهي شعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_m$ نحو شعاع يدعى شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}$ هو مشتق شعاع الموضع $\vec{r}$ أي :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

و إذا كان : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ يكون :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}}$$

أو :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}}$$

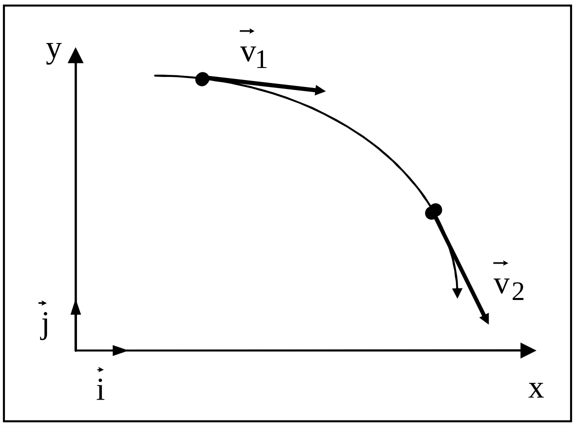
حيث :

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt}}$$

- كما يكون :

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

- يكون شعاع السرعة اللحظية مماسي للمسار في كل موضع عند كل لحظة و دوما في جهة الحركة (الشكل) ، و لا يكون أبدا شعاع السرعة عكس جهة الحركة .
- في حالة مسار مستقيم يكون شعاع السرعة محمول على المسار و يتميز بنفس الخصائص السابقة .



• شعاع التسارع :

- شعاع التسارع المتوسط الذي يرمز له بـ $\vec{a}_m$ بين لحظتين t_1 ، t_2 هو النسبة بين شعاع تغير السرعة $\overrightarrow{\Delta v}$ بين هاتين اللحظتين و المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ أي :

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}}$$

عندما يؤول Δt نحو الصفر ، ينتهي شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_m$ نحو شعاع يدعى شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}$ هو مشتق شعاع السرعة $\vec{v}$ أي :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

و إذا كان : $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ يكون :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}}$$

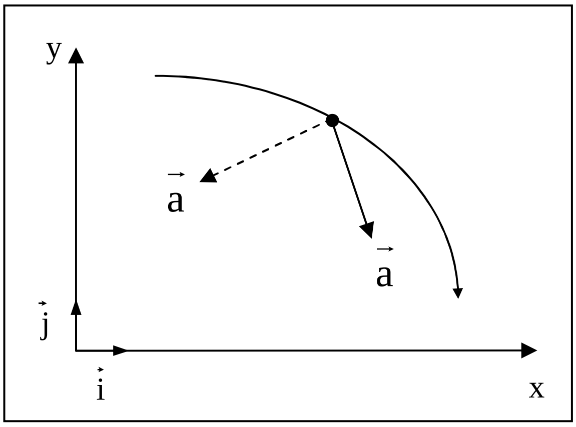
أو :

$$\boxed{\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}}$$

حيث :

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}}$$

- يكون شعاع التسارع اللحظي متجه دوما نحو تقعر المسار في حالة مسار منحني و محمول على المسار في حالة مسار مستقيم ، و ليس بالضرورة يكون في جهة الحركة (الشكل) .



ملاحظة-1 :

- وحدة السرعة هي : m/s ، و وحدة التسارع هي : m/s^2 .

ملاحظة-1 :

يمكن ابراز العلاقة بين الأشعة $\vec{r}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{a}$ ، كما يلي :

$$\vec{r}(t) \underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$

$$x(t) \underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}}{\rightleftarrows}} v_x(t) \underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}}{\rightleftarrows}} a_x(t)$$

$$y(t) \underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}}{\rightleftarrows}} v_y(t) \underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{اشتقاق}}{\rightleftarrows}} a_y(t)$$

تذكير بالتكامل (الدالة الأصلية) :

في درسنا هذا مطالبين بالدالة الأصلية (تكامل) للدالة من الشكل x^n فقط ، الجدول التالي يبن الدالة الأصلية لهذه الدالة مرفق بأمثلة .

الدالة	الدالة الاصلية
x^n	$\frac{1}{n+\&}x^{n+1}+C$
x^2	$\frac{1}{3}x^3+C$
x	$\frac{1}{2}x^2+C$
ax	$\frac{a}{2}x^2+C$
a	$ax+C$
0	C

التمرين (1) :

1- جسم نقطي (S_1) كتلته m يتحرك في معلم مستوي $(o\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$ ، شعاع موضعه في كل لحظة يعبر عنه بالعلاقة:

$$\vec{r} = (t^3+0.5)\ \ \vec{i} + (2t^2)\vec{j}$$

حيث يقدر الزمن بالثانية و المسافة بالمتر .

▪ عند اللحظة $t = 1\ s$ أوجد :

أ- البعد d للجسم النقطي (S_1) عن مبدأ المعلم (o) .

ب- سرعة الجسم النقطي (S_1) .

جـ- تسارع الجسم النقطي (S_1) .

2- متحرك نقطي آخر (S_2) كتلته m يتحرك في معلم مستوي ، شعاع تسارعه في كل لحظة يعبر عنه بالعلاقة :

$$\vec{a} = (2\,t)\,\vec{i} + \vec{j}$$

- أكتب العبارة اللحظية (الزمنية) لكل من شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع الموضع $\vec{r}$ علما أنه في اللحظة $t = 0$ يكون :

$$\vec{r}_0 = 2\,\vec{i} \;،\; \vec{v}_0 = 10\,\vec{i} + 2\vec{j}$$

الأجوبة :

1- عند اللحظة $t = 1\ s$:

H- بعد الجسم النقطي (S_1) عن المبدأ :

يمثل هذا البعد (d) طويلة شعاع الموضع عند اللحظة $t = 1\ s$ أي :

$$d = \left\|\vec{r}\right\|_{(t=1)}$$

$$t = 1\ s \;\rightarrow\; \vec{r} = (\,(1)^3 + 0.5\,)\,\vec{i} + (\,2(1)^2\,)\,\vec{j} = 1.5\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

$$d = \sqrt{(1.5)^2 + (2)^2} = 2.5\ m$$

ب- سرعة الجسم النقطي (S_1) :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (3t^2)\,\vec{i} + (4t)\,\vec{j}$$

$$t = 1\ s \;\rightarrow\; \vec{v} = (3(1)^2)\,\vec{i} + (4(1))\,\vec{j} = 3\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5\ m/s$$

جـ تسارع الجسم النقطي (S_1) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (6t)\,\vec{i} + (4)\,\vec{j}$$

$$t = 1\ s \;\rightarrow\; \vec{a} = (6\,.1)\,\vec{i} + (4)\,\vec{j} = 6\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

$$\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{(6)^2 + (4)^2} = 7.21\,m/s^2$$

2- العبارات اللحظية :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 2\,t \\ a_y = 1 \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = t^2 + C_1 \\ v_y = t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \;\rightarrow\; \vec{v}\begin{cases} v_x = 10 \\ v_y = 2 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 10 = (0)^2 + C_1 \;\rightarrow\; C_1 = 10 \\ 2 = (0) + C_2 \;\rightarrow\; C_2 = 2 \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = t^2 + 10 \\ v_y = t + 2 \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r}\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + 10\,t + C_1' \\ y = \frac{1}{2}t^2 + 2\,t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r}\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

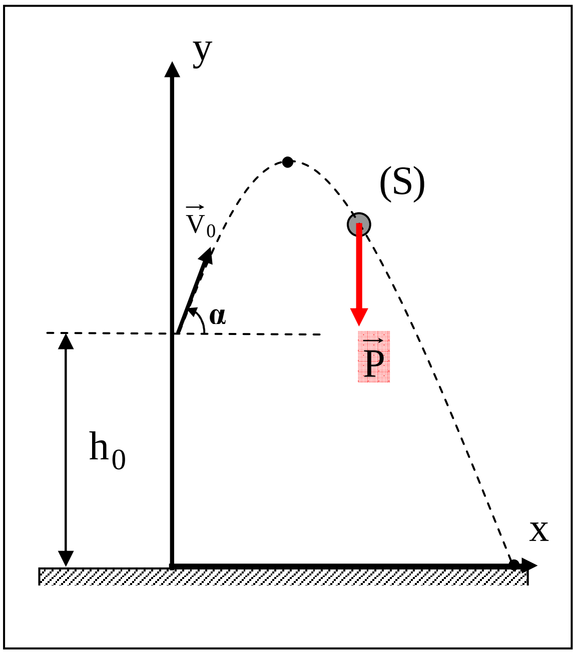
بالتعويض :

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{3}(0)^3 + 10(0) + C_1' \rightarrow C_1' = 2 \\ 0 = \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + C_2' \rightarrow C_2' = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + 10\,t + 2 \\ y = \frac{1}{2}t^2 + 2\,t \end{cases}$$

التمرين (2) :



من نقطة M_0 تقع على ارتفاع h_0 من سطح الأرض نقذف عند اللحظة $t = 0$ كرة (S) كتلتها m بسرعة ابتدائية v_0 يصنع شعاعها الزاوية α مع الأفق، أثناء حركة الكرة تخضع إلى تأثير ثقلها فقط (الشكل) .

- نعتبر العلاقة الشعاعية التالية :

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

- $\vec{a}$: شعاع التسارع اللحظي .
- $\vec{P}$: هي قوة الثقل .

نذكر أن : $P = m\,g$ حيث g هي الجاذبية الأرضية و m هي كتلة الكرة .

1- حلل هذه العلاقة الشعاعية وفق المحور ox ، oy و بين أن :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

2- أوجد العبارة اللحظية لكل من مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}(t)$ و مركبتي شعاع الموضع $\vec{r}(t)$.

الأجوبة :

1- تحليل العلاقة الشعاعية و استنتاج عبارة التسارع $\vec{a}(t)$:

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ P_y = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_y \end{cases}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

2- عبارتي $\vec{v}(t)$ ، $\vec{r}(t)$:

لدينا سابقا :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 \cos\alpha = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha = -g\,(0) + C_2 \rightarrow C_2 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t + C_1' \\ y = -\dfrac{1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = 0 \\ y = h_0 \end{cases}$$

بالتعويض :

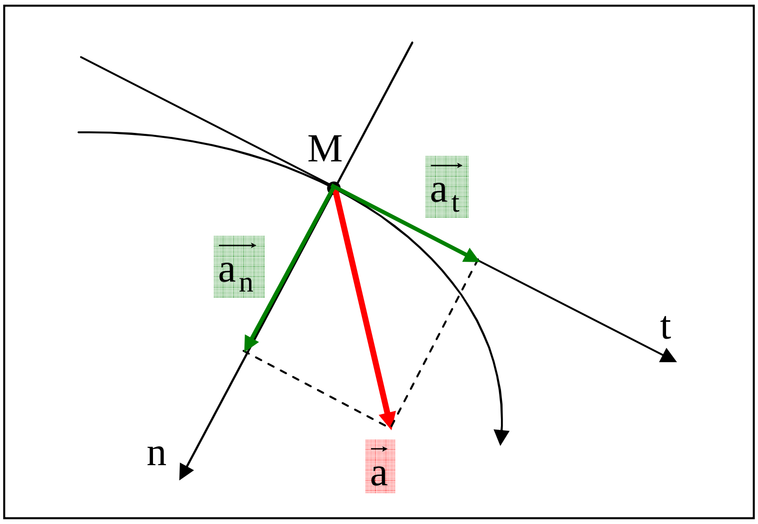
$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos\alpha\,(0) + C_1' \rightarrow C_1 = 0 \\ h_0 = -\frac{1}{2} g\,(0)^2 + v_0 \sin\alpha(0) + C_2' \rightarrow C_2 = h_0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h_0 \end{cases}$$

• مركبتي شعاع التسارع في معلم فريني :

- معلم فريني هو معلم مبدأه موضع المتحرك M في لحظة ما يتكون من محورين متعامدين أحدهما (ot) يكون مماسي للمسار في الموضع M جهته هي جهة الحركة و الآخر (on) ناظمي ، يتجه نحو مركز المسار (الشكل)



- يمكن تحليل شعاع التسارع عند الموضع M في اللحظة t ، الى مركبتين : مماسية $\vec{a}_t$ ، وناظمية $\vec{a}_n$ وفق المحورين المماسي و الناظمي ، كما مبين في (الشكل) التالي :

و نكتب :

$$\boxed{a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2}}$$

حيث :

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$$

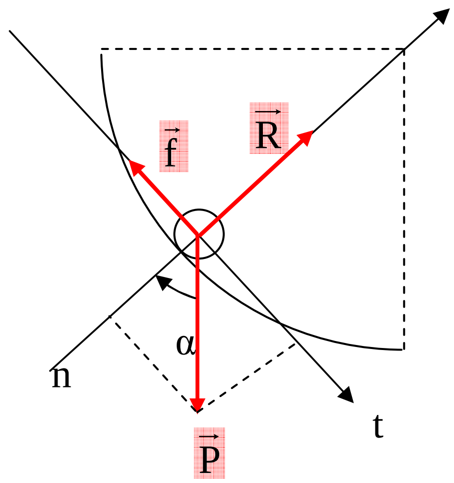
- v : طويلة شعاع السرعة عند اللحظة t .
- r : نصف قطر المسار المنحني عند اللحظة t .

كما يكون :

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}}}$$

التمرين (3) :

جسم نقطي (S) يتحرك على مسار دائري خاضع إلى تأثير القوى : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.



نعتبر العلاقة الشعاعية التالية :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ هو شعاع التسارع اللحظي .

1- حلل العلاقة الشعاعية وفق محوري معلم فريني المماسي (ot) ، و الناظمي (on) .

2- أكتب عبارة التسارع المماسي a_t بدلالة : m ، g ، f ، α .

3- عبر عن السرعة اللحظية للجسم (S) بدلالة m ، g ، α ، R ، r .

الأجوبة :

1- تحليل العلاقة الشعاعية في معلم فريني :

لدينا :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محوري معلم فريني نجد :

$$\begin{cases} P.\sin\alpha - f = m\,.\,a_t & \text{.................. (1)} \\ -P.\cos\alpha + R = m\,.\,a_n & \text{.............. (2)} \end{cases}$$

2- عبارة التسارع المماسي a_n :

من العلاقة (1) لدينا :

$$m.g.\sin\alpha - f = m\,.\,a_t \;\rightarrow\; a_t = \frac{m.g.\sin\alpha - f}{m}$$

3- عبارة سرعة الجسم (S) :

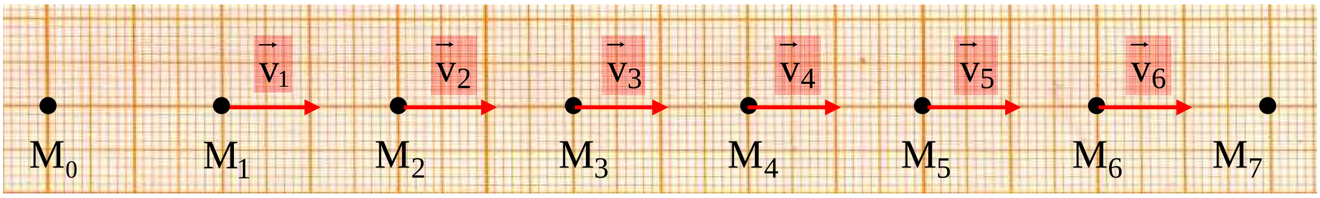
لدينا $P = m.g$ ، $a_n = \frac{v^2}{R}$ و منه يمكن كتابة العلاقة (2) كما يلي :

$$-m.g.\cos\alpha + R = m.\frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{r(-m.g.\cos\alpha + R)}{m}}$$

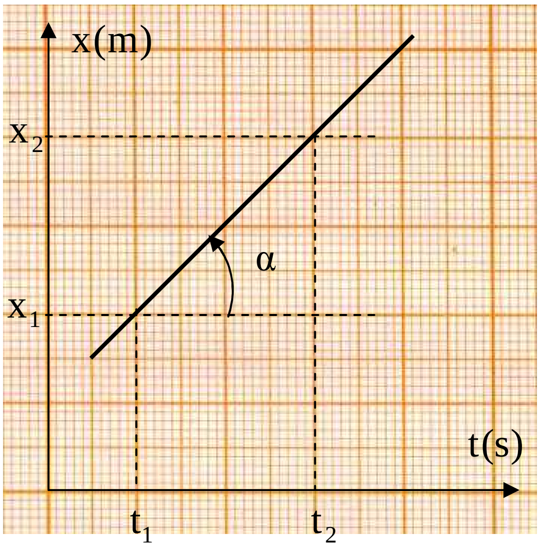
الدراسة الشعاعية و البيانية في مختلف الحركات

• الدراسة الشعاعية و البيانية في الحركة المستقيمة المنتظمة

- الحركة المستقيمة المنتظمة هي حركة مسارها مستقيم و سرعتها ثابتة ، حيث يقطع فيها المتحرك مسافات متساوية d خلال أزمنة متساوية τ .
- في الحركة المستقيمة المنتظمة لا يخضع المتحرك إلى أي قوة (مبدأ العطالة) أو يخضع إلى قوى مجموعها الشعاعي معدوم .
- في الحركة المستقيمة المنتظمة يكون شعاع السرعة ثابت في المنحى و الجهة و الطويلة . و عليه يكون شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{v}$ معدوم .



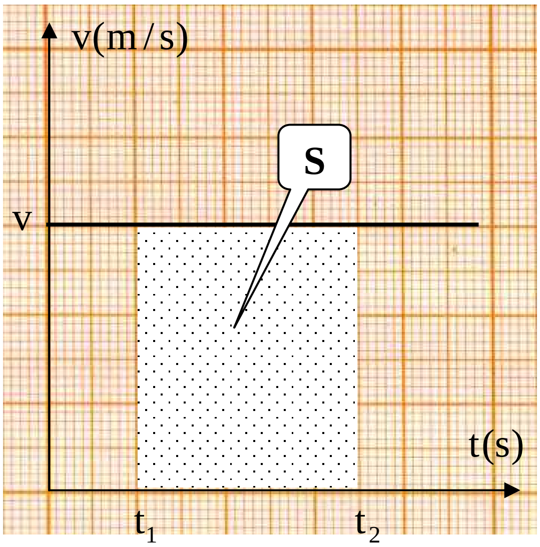
- مخطط المسافة $x = f(t)$ في الحركة المستقيمة المنتظمة عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل : $x = a\,t + b$ (a : ميل هذا المستقيم) ، كما مبين في (الشكل) التالي :



- تساوي سرعة المتحركة من مخطط المسافة ميل المستقيم أي :

$$\boxed{v = \tan\alpha = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

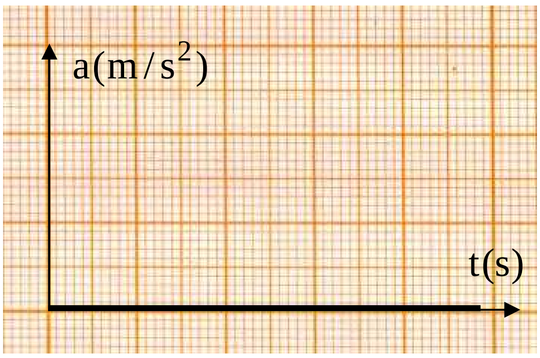
- مخطط السرعة $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة (ot) كما مبين في (الشكل) التالي :



- تساوي المسافة المقطوعة d ، من طرف متحرك بين لحظتين t_1 ، t_2 هندسيا من مخطط السرعة ، مساحة السطح (S) المحصور بين المنحنى $v = f'(s)$ و محور الأزمنة و المستقيمين العموديين على المحور (ot) في اللحظتين t_1 ، t_2 (الشكل) أي :

$$\boxed{d = S = v(t_2 - t_1)}$$

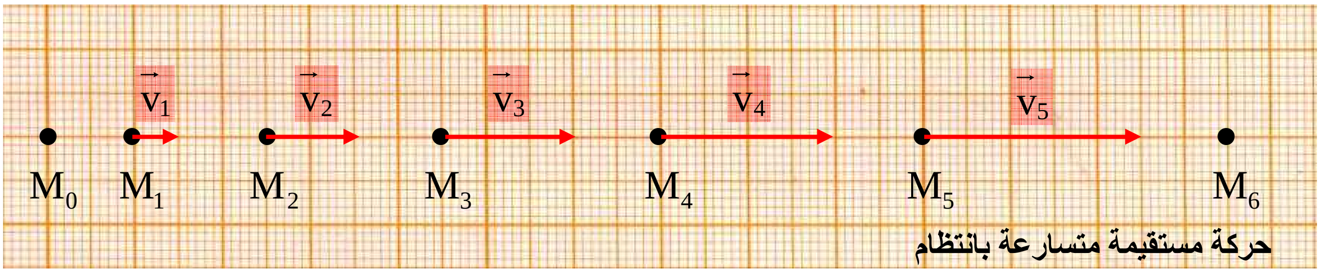
- مخطط التسارع $a = f(t)$ عبارة عن مستقيم منطبق على محور الأزمنة (ot) كما مبين في (الشكل) التالي :

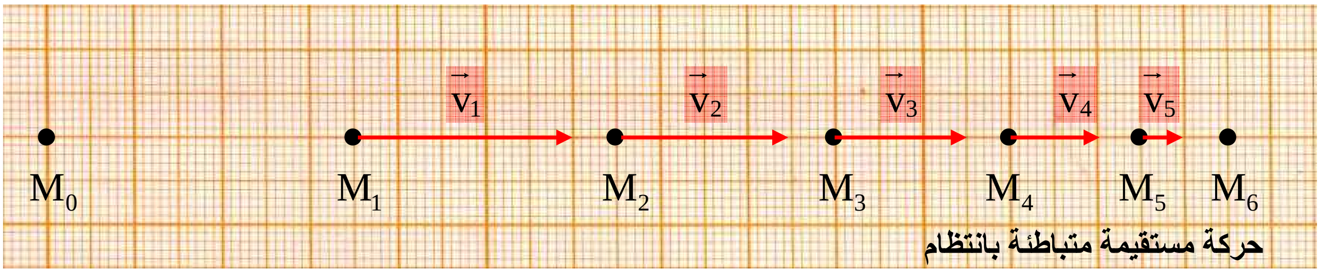


• الدراسة الشعاعية و البيانية في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

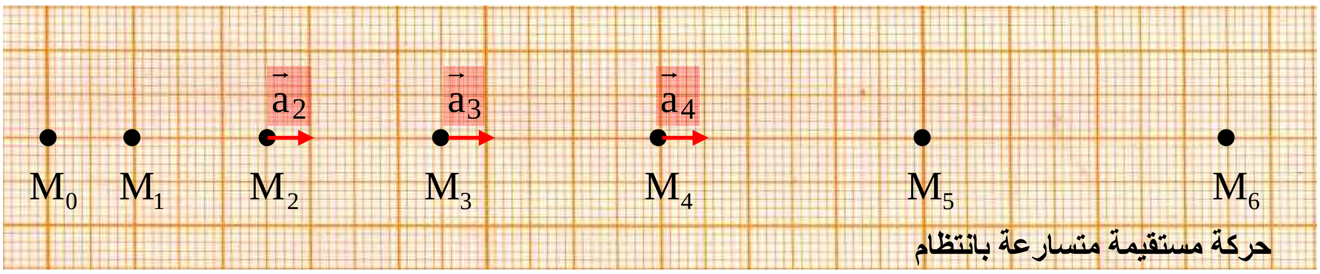
- عندما يخضع جسم متحرك إلى قوة $\vec{F}$ ثابتة في المنحى و الجهة و الطويلة تكون حركة هذا الجسم مستقيمة متغيرة بانتظام ، فإذا كانت هذه القوة في جهة حركته تكون الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام أما إذا كانت في الجهة المعاكسة لجهة حركته تكون الحركة مستقيمة متباطئة بانتظام .

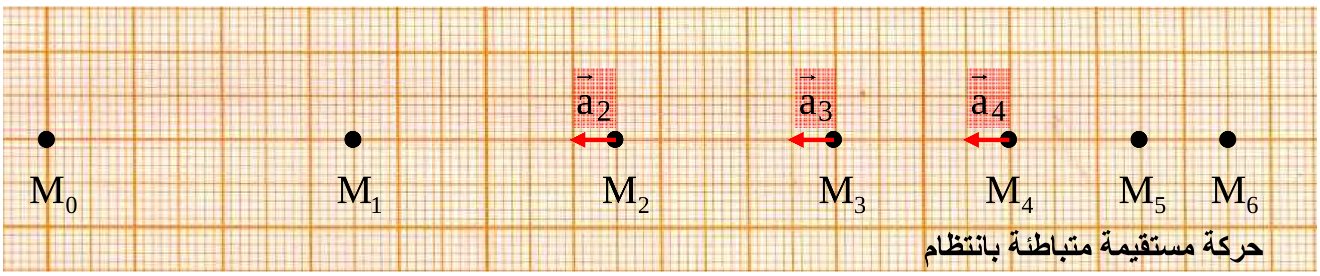
- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يحافظ شعاع السرعة $\vec{v}$ على منحاه و جهته و طويلته تتغير بانتظام حيث تتزايد بانتظام في حالة الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام و تتناقص بانتظام في حالة الحركة المستقيمة المتباطئة بانتظام .



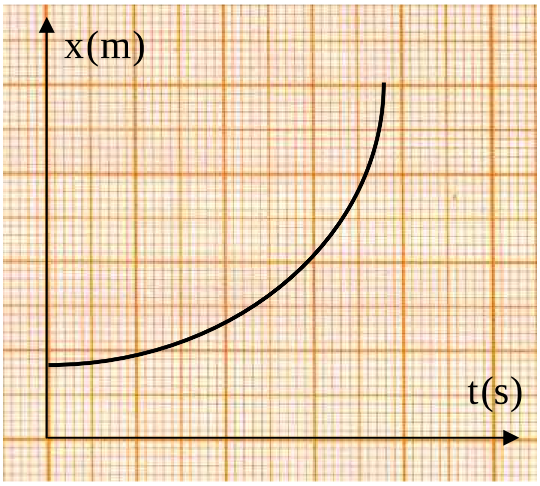


- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يكون شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت في المنحى و الجهة و الطويلة ، و يكون في جهة الحركة في حالة الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام و عكس جهة الحركة في حالة الحركة المستقيمة المتباطئة بانتظام .

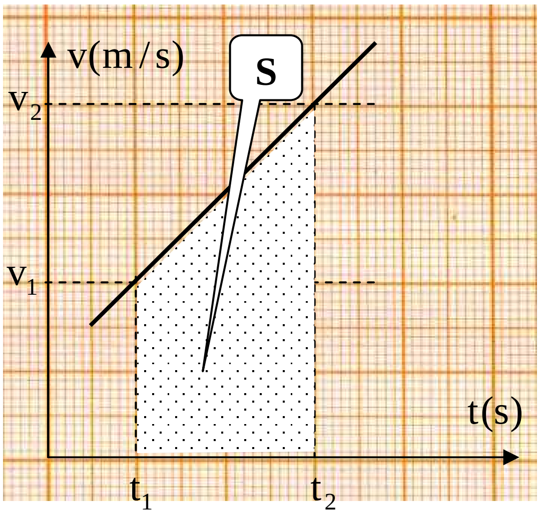




- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يكون مخطط المسافة $x = f(x)$ عبارة عن خط منحني ، ففي الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام يكون مخطط المسافة $x = f(t)$ كما في (الشكل) التالي :



- مخطط السرعة $v = f(x)$ في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يكون عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل : $v = a\,t + b$ ، و في الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام يكون مخطط السرعة كما مبين في (الشكل) التالي :



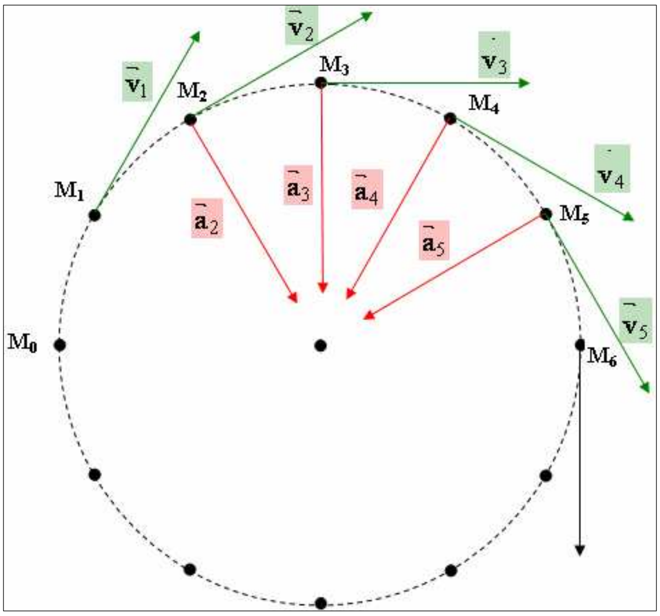
تساوي المسافة المقطوعة d من طرف متحرك بين لحظتين t_1 ، t_2 ، هندسيا من خلال مخطط السرعة ، مساحة السطح (S) (لشبه المنحرف مثلا) المحصور بين المنحنى $v = f(t)$ و محور الأزمنة (ot) و المستقيمين العموديين على محور الأزمنة في اللحظتين t_1 ، t_2 ، أي :

$$\boxed{d = S = \frac{\text{ق ك} + \text{ق ص}}{2}\,\text{إ} = \frac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2}}$$

- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يكون مخطط التسارع $a = f(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، و في الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام يكون مخطط تغير السرعة كما مبين في (الشكل) التالي :

• الدراسة الشعاعية في الحركة الدائرية المنظمة

- نقول عن حركة جسم أنها دائرية منتظمة إذا كان مسارها دائريا و سرعتها ثابتة .
- يحافظ شعاع السرعة $\vec{v}$ في الحركة الدائرية المنتظمة على قيمته بينما منحاه يكون مماسي للمسار في كل لحظة (الشكل) .
- في الحركة الدائرية المنتظمة يكون شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت في القيمة و متجه دوما نحو مركز للمسار (عمودي على شعاع السرعة) (الشكل) .



ملاحظة مهمة :

- يمكن تحديد طبيعة الحركة (مستقيمة منتظمة ، مستقيمة متغيرة بانتظام ، دائرية منتظمة ، بناءا على شعاع التسارع أو قيمته كما يلي :
  - إذا كان شعاع التسارع معدوم تكون الحركة مستقيمة منتظمة .
  - إذا كان شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .
  - إذا كانت قيمة التسارع a معدومة تكون الحركة مستقيمة منتظمة .
  - إذا كانت قيمة التسارع a ثابتة ، تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام أو دائرية منتظمة ، فإذا كان المسار مستقيم أو السرعة من الشكل $v = at + b$ تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، أما إذا كان المسار دائري و السرعة v ثابتة فالحركة دائرية منتظمة .

- تعتمد طبيعة الحركة (متسارعة أو متباطئة) على الجداء السلمي $\vec{v}\,.\,\vec{a}$ حيث :
- إذا كان $(\vec{a}\,.\,\vec{v} > 0)$ تكون الحركة متسارعة .
- إذا كان $(\vec{a}\,.\,\vec{v} < 0)$ تكون الحركة متباطئة .
- إذا كان $(\vec{a}\,.\,\vec{v} = 0)$ تكون الحركة منتظمة (مستقيمة منتظمة في الحركات المستقيمة أو دائرية منتظمة في الحركات المنحنية) .

نذكر بأنه في معلم مستوي مثلا يكون :

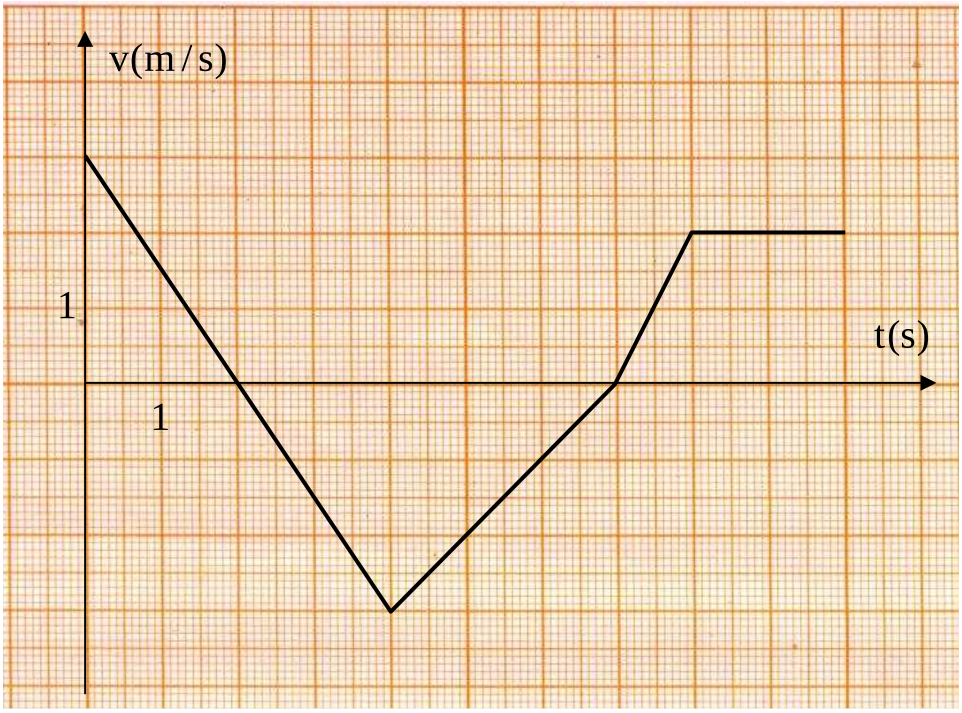
$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{v} = a_x v_x + a_y v_y}$$

و في معلم خطي يكون :

$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{v} = a_x v_x}$$

التمرين (4):

جسم صلب (S) يتحرك على محور موجه ox ، المخطط البياني التالي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة هذا الجسم بدلالة الزمن .

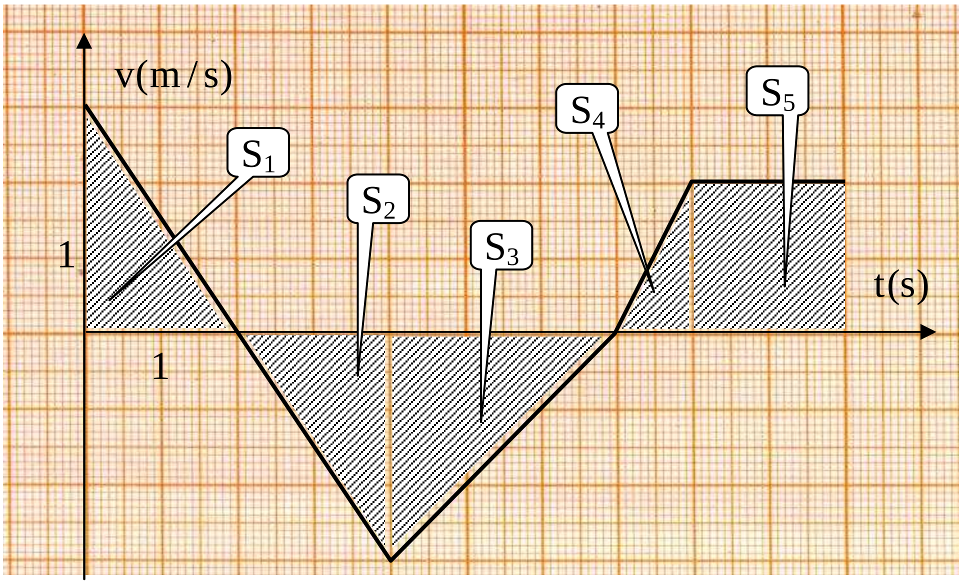


1- حدد في كل طور :
- طبيعة الحركة .
- قيمة التسارع .
- المسافة المقطوعة .

2- أرسم المنحنى البياني الممثل لتغيرات تسارع مركز عطالة الجسم (S) بدلالة الزمن t .

الأجوبة :

1- تحديد طبيعة الحركة ، قيمة التسارع ، المسافة المقطوعة ، في كل طور :



الطور الأول :

المنحنى v(t) عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل v = at + b ، و حيث أن : v > 0 ، a < 0 (الميل سالب) يكون a.v < 0 ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة بانتظام .

- $a_1 = \tan\alpha = -\dfrac{3\ .\ 1}{2\ .\ 1} = -1.5\ m/s^2$
- $d_1 = S_1 = \dfrac{3\ .2}{2} = 3\,m$

الطور الثاني :

المنحنى v(t) عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل v = at + b ، و حيث أن : v < 0 ، a < 0 (الميل سالب) يكون a.v > 0 ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة بانتظام .

- $a_2 = \tan\alpha = -\dfrac{3\ .\ 1}{2\ .\ 1} = -1.5\,m/s^2$
- $d_2 = S_2 = \dfrac{3\ .2}{2} = 3\,m$

الطور الثالث :

المنحنى v(t) عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل v = at + b ، و حيث أن : v < 0 ، a > 0 (الميل موجب) يكون a.v < 0 ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة بانتظام .

- $a_3 = \tan\alpha = +\dfrac{3\ .\ 1}{3\ .\ 1} = 1\,m/s^2$
- $d_3 = S_3 = \dfrac{3\ .3}{2} = 4.5\,m$

الطور الرابع :

المنحنى v(t) عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل v = at + b ، و حيث أن : v > 0 ، a > 0 (الميل موجب) يكون a.v > 0 ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة بانتظام .

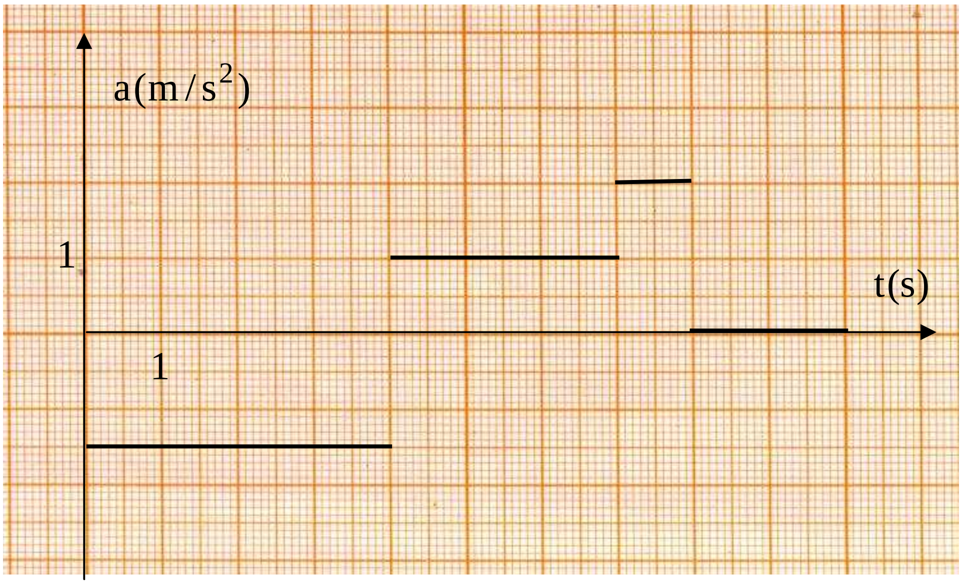
- $a_4 = \tan\alpha = -\frac{2\,.\,1}{1\,.\,1} = 2\ m/s^2$
- $d_4 = S_4 = \frac{2\,.1}{2} = 1m$

الطور الخامس :

المنحنى v(t) عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة منتظمة .

- $a_5 = 0$
- $d_5 = S_5 = (2.2) = 4\,m$

2- المنحنى البياني a(t) :

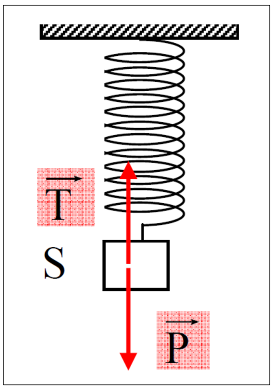


قانون نيوتن الثاني

● تذكير بمفهوم الجملة الميكانيكية و القوى الخارجية :

- الجملة الميكانيكية هو الجسم أو جزء من الجسم أو مجموعة من الأجسام التي تكون محل الدراسة الفيزيائية .
- تكون قوة داخلية إذا كان الجسمين المؤثر و المتأثر بهذه القوة ينتميان إلى نفس الجملة ، أما أذا كان أحد الجسمين داخل الجملة و الآخر خارجها أو كلاهما خارج الجملة نقول عن القوة أنها خارجية .

مثال :



في الشكل المقابل يخضع الجسم (S) إلى تأثير قوتين الأولى قوة الثقل $(\vec{P})$ الناتجة عن تأثير (جذب) الأرض للجسم (S) و الثانية قوة توتر النابض $(\vec{T})$ الناتجة عن تأثير النابض على الجسم (S)

-القوتين : الثقل $\vec{P}$ و التوتر $\vec{T}$ يمكن أن تكون داخلية أو خارجية حسب الجملة المختارة كما مبين في الجدول التالي :

الجملة	الثقل $\vec{P}$	التوتر $\vec{T}$
(جسم + أرض)	داخلية	خارجية
(جسم)	خارجية	خارجية
(جسم + نابض)	خارجية	داخلية
(جسم + أرض + نابض)	داخلية	داخلية

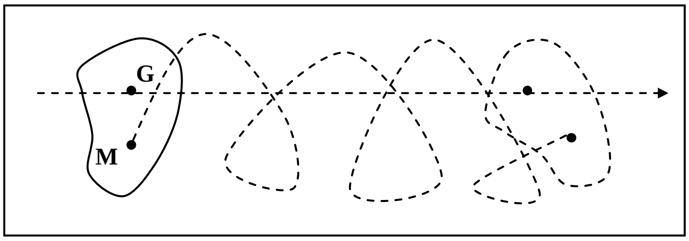
● مفهوم النقطة المادية و الجسم الصلب :

- الجسم الصلب هو الجملة التي لا يتغير شكلها أثناء قيامها بحركة ، أي أن المسافة بين نقطتين كيفيتين من هذه الجملة تبقى ثابتة أثناء الحركة .

- النقطة المادية هي كل جسم ذو أبعاد مهملة أمام المرجع الذي يدرس بالنسبة إليه هذا الجسم ، و كتلة النقطة المادية هي كتلة هذا الجسم .

● مفهوم مركز العطالة :

- عندما يكون جسم صلب معزولا أو شبه معزول في مرجع غاليلي ، ويتحرك بحركة كيفية (الشكل-2) فإنه توجد نقطة (G) وحيدة من هذا الجسم حركتها مستقيمة منتظمة ، ندعوها بمركز عطالة هذا **الجسم الصلب**.



- مركز عطالة جسم متناظر منطبق على مركز تناظره ، مثلا مركز عطالة كرة منطبق على مركزها .

● قانون نيوتن الثاني :

بالإضافة إلى القانون الأول (مبدأ العطالة) ، و الثالث (مبدأ الأفعال المتبادلة) ينص القانون الذين الذي نحن بصدد دراسته في هذه الوحدة على ما يلي :

" في معلم غاليلي ، المجموع الشعاعي $\sum \vec{F}_{ext}$ للقوى الخارجية المطبقة على مركز عطالة جملة مادية يساوي في كل لحظة جداء كتلتها في شعاع تسارع مركز عطالتها "

- يكتب القانون الثاني لنيوتن كما يلي :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G}$$

- تعطى المركبات الثلاث للمعادلة الشعاعية في المعلم الكارتيزي :

$$\boxed{\sum F_x = ma_x , \sum F_y = ma_y , \sum F_z = ma_z}$$

سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

عرض نظري و تمارين

05

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

****

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 03

حركة الأقمار الاصطناعية و الكواكب

• دور الحركة الدائرية المنتظمة :

- دور الحركة الدائرية المنتظمة الذي يرمز له بـ T و وحدته الثانية (s) هو المدة اللازمة لإنجاز دورة واحدة ، يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$\boxed{T = \frac{2\pi.r}{v}}$$

حيث :

- r : نصف قطر المسار الدائري (يقدر بالمتر m) .
- v : سرعة المتحرك على المسار الدائري (تقدر بالمتر على الثانية m/s) .

مثال-1 :

جسم نقطي (S) ، يتحرك على مسار دائري نصف قطره r = 50 cm بسرعة v = 2 m/s . نحسب دور حركة هذا الجسم .

$$T = \frac{2\pi.r}{v} = \frac{2\pi.0.5}{2} = 0.5\,\pi = 1.57\,s$$

مثال-2 :

جسم نقطي (S) ، يدور بمعدل 600 دورة في الدقيقة ، نحسب دور حركة هذا الجسم .

- حسب تعريف الدور و المتمثل في أنه الزمن اللازم لإنجاز دورة واحدة ، يكون حسب القاعدة الثلاثة :

600 دورة $\longrightarrow$ 60 s (1min)

1دورة $\longrightarrow$ T s

و منه :

$$T = \frac{60 . 1}{600} = 0.1s$$

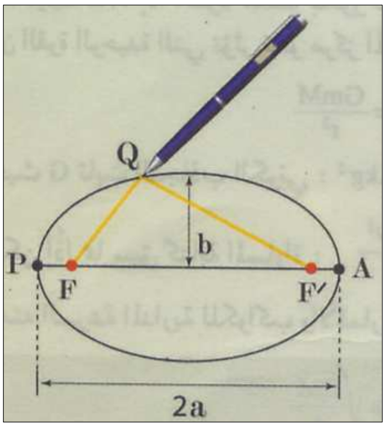
• قانون كبلر الأول :

- ينص على ما يلي :

" إن الكواكب تتحرك وفق مدارات اهليلجية تمثل الشمس إحدى محرقيها "

خواص الإهليليج :

- الإهليليج هو منحنى يكون فيه دائما مجموع المسافتين من نقطة منه إلى المحرقين F و 'F ثابتا (الشكل) .



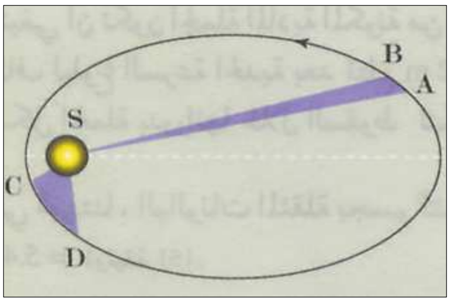
• قانون كبلر الثاني :

- ينص على ما يلي :

" إن المستقيم الرابط بين الشمس و كوكب يمسح مساحات متساوية خلال مجالات زمنية متساوية "

مثال :

إذا فرضنا أن خلال مجال زمني معين ، ينتقل كوكب من النقطة A إلى النقطة B و ينتقل من C إلى D خلال مجال زمني آخر.



حسب القانون الثاني ، المساحتانSAB و SCD متساويتان إذا كان المجالين الزمنيين متساويين. و هذا دليل على تتغير قيمة سرعة الكوكب على مداره.

• قانون كبلر الثالث :

- ينص على ما يلي :

" إن مربع الدور لمدار كوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس أي : $T^2 = k\, r_m^3$ "

- المسافة المتوسطة تساوي نصف طول المحور الكبير a و عليه يعبر عن النص بالعلاقة :

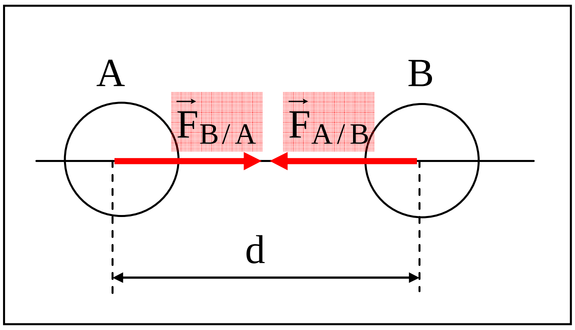
$$T^2 = k\,a^3 \Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = k$$

و بعبارة أخرى :

$$\frac{T_1^{\,2}}{r_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{r_2^{\,3}} = \frac{T_3^{\,2}}{r_3^{\,3}} = \ldots\ldots\ldots = k$$

k : ثابت صالح لكل الكواكب و مستقل عن كتلة الكواكب.

● قانون الجذب العام:



- في عام 1687 ، أعطى إسحاق نيوتن قانون الجذب العام في كتابه الشهير على الشكل التالي :

" جسمان كيفيان يتجاذبان بقوة تتناسب مباشرة مع جداء كتلتيهما و عكسيا مع مربع المسافة التي تفصلهما "

- يمكن نمذجة قوة الجذب العام ، المتبادلة بين جسمين A و B كتلتهما على الترتيب M_A و M_B تفصلهما المسافة d ، بعلاقة رياضية تسمح بتحديد شدة هذه القوة بدلالة الكتلتين و المسافة الفاصلة بين مركزي الجسمين ، تكون كما يلي :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G\,\frac{M_A . M_B}{d^2}$$

حيث G ثابت التناسب يدعى **ثابت الجذب العام** و يقدر في الجملة الوحدات الدولية (SI) بالنيوتن في المتر مربع على الكيلوغرام المربع ($N.m^2/kg^2$) ، و قيمته : $G = 6.67 \,.\, 10^{-11}$.

التمرين (1) :

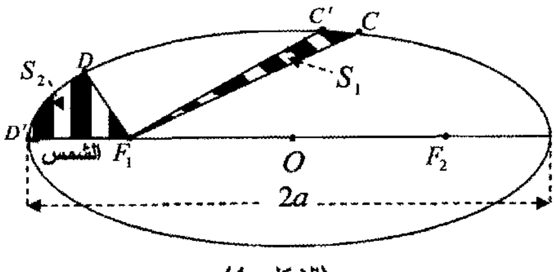
يكون مسار حركة مركز عطالة كوكب حول الشمس اهليليجيا كما يوضحه (الشكل-4) .

يتنقل الكوكب أثناء حركته على مداره من النقطة C إلى النقطة C' ثم من النقطة D إلى النقطة D' خلال نفس المدة الزمنية Δt .

1- كيف نسمي النقطتين F_1 ، F_2 ، و ما هي خاصيتهما .

2- اعتمادا على قانون كبلر الأول حدد موقع الشمس في الشكل .

3- اعتمادا على قانون كبلر الثاني بين أن $v_{mD} < v_{mC}$ ، حيث v_{mC} هي متوسط السرعة بين الموضعين C و C' و v_{mD} متوسط السرعة بين الموضعين D و D' .



(الشكل-4)

الأجوبة :

1- نسمي النقطتين F_1 ، F_2 بمحرقي الإهليليج ، و خاصيتهما هو أن مجموع بعدهما عن نقطة من الإهليليج يكون ثابت في جميع نقاط هذا الإهليليج .

2- حسب قانون كبلر الأول تقع الشمس في أحد محرقي الإهليليج (النقطة F_1 في الشكل) .

3- إثبات أن $v_{mC} < v_{mD}$:

حسب القانون الثاني لكبلر ، تكون المساحة التي يمسحها نصف قطر مسار الكوكب في نفس المدة الزمنية Δt ، نفسها أثناء الانتقال من C إلى C' و كذا من D إلى D' ، و كون أن نصف القطر ليس نفسه في الحالتين يكون من الشكل :

$CC' < DD'$

بقسمة الطرفين على المدة Δt :

$$\frac{CC'}{\Delta t} < \frac{DD'}{\Delta t} \rightarrow v_{mC} < v_{mD}$$

التمرين (2) :

يتحرك قمر إصطناعي (S) بسرعة ثابتة على مدار دائري حول الأرض نصف قطره r . أكتب العبارات التالية :

1- عبارة شدة القوة المؤثرة على القمر الإصطناعي بدلالة G ، m ، M_T ، r حيث G : ثابت الجذب العام ، m : كتلة القمر الإصطناعي ، M_T : كتلة الأرض ، r : نصف قطر مسار القمر الإصطناعي حول الأرض .

2- أوجد باستعمال التحليل البعدي وحدة ثابت الجذب العام (G) في الجملة الدولية (SI) .

3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن استنتج عبارة التسارع الناظمي بدلالة G ، M_T ، r .

4- أوجد عبارة سرعة القمر الإصطناعي بدلالة G ، M_T ، r . .

5- أوجد عبارة دور القمر الاصطناعي بدلالة v ، r .

6- أوجد عبارة دور القمر الاصطناعي بدلالة بدلالة G M_T ، r .

7- أثبت أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة من أجل أي قمر اصطناعي .

8- ما معنى قمر إصطناعي جيو مستقر . أوجد ارتفاع هذا القمر الإصطناعي على سطح الأرض و كذا سرعته على مداره .

المعطيات :

- ثابت الجذب العام : $G = 6.67 . 10^{-11}$ SI .
- كتلة الأرض : $M_T = 5.98 . 10^{24}$ kg .
- نصف قطر الأرض : $R = 6.37 . 10^{6}$ m .
- دور حركة الأرض حول نفسها : T = 23 h , 56 min .

الأجوبة :

1- عبارة شدة القوة المؤثرة :

حسب قانون الجذب العام يخضع القمر الاصطناعي إلى قوة $\vec{F}_{T/S}$ ناتجة عن جذب الأرض (T) للقمر الاصطناعي (S) و حسب ذات القانون شدة هذه القوة هي :

$$\left\|\vec{F}_{T/S}\right\| = F = G\,\frac{m\,.\,M_T}{r^2}$$

2- وحدة G :

- لدينا :

$$F = \frac{G.m.M}{r^2} \rightarrow G = \frac{F.r^2}{m.M}$$

$$[G]=\frac{[F].[r]^2}{[M].[M]}$$

من العلاقة (2) الناتجة عن الدراسة السابقة لدينا :

$$F = m\,a_n \rightarrow [F]=[M].[a]$$

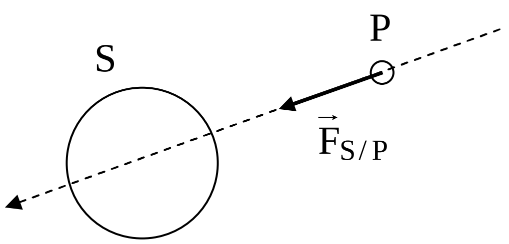
و منه يصبح :

$$[G]=\frac{[M].[a].[r]^2}{[M].[M]} \rightarrow [G]=\frac{[a].[r]^2}{[M]}$$

$$\rightarrow [G]=\frac{\frac{m}{s^2}.m^2}{kg} \rightarrow [G]=\frac{\frac{m}{s^2}.m^2}{kg} \rightarrow [G]=m^3/s^2.kg\ .$$

3- عبارة a_n :

- الجملة المدروسة : قمر اصطناعي (S) .
- مرجع الدراسة : مركزي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوة الخارجية المؤثرة على الجملة : القوة $(\vec{F}_{T/S})$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\sum\vec{F}_{ext}=m\,\vec{a}$$

$$\sum\vec{F}_{T/S}=m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية على المحور الناظمي :

$$F_{T/S}=m\,a_n$$

$$G\frac{m.M_T}{r^2}=m\,a_n \rightarrow a_n=G\frac{M_T}{r^2}$$

4- عبارة سرعة القمر الاصطناعي حول الأرض بدلالة G ، M_T ، r :

لدينا من جهة :

$$a_n=G\frac{M_T}{r^2}$$

ومن جهة أخرى :

$$a_n=\frac{v^2}{r}$$

ومنه :

$$\frac{v^2}{r}=G\frac{M_T}{r^2} \rightarrow v=\sqrt{\frac{G.M_T}{r}}$$

5- عبارة الدور بدلالة v ، r :

$$T=\frac{2\pi\,r}{v}$$

6- عبارة الدور بدلالة G ، M_T ، r :

من جهة :

$$v = \sqrt{\frac{G \, . M_T}{r}} \rightarrow v^2 = \frac{G \, M_T}{r}$$

و من جهة أخرى :

$$T = \frac{2\pi \, r}{v} \rightarrow v = \frac{2\pi \, r}{T} \rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

ومنه يكون :

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{G \, M_T}{r^2}$$

$$4\pi^2 \, r^3 = T^2 \, G \, M_T \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \, . M_T}}$$

7- إثبات أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة :

مما سبق لدينا :

$$4\pi^2 \, r^3 = T^2 \, G \, M_T \longrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G . M_T}$$

π ، G ، M_T ثوابت ، إذن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الاصطناعية .

8- معنى قمر جيو مستقر :

يعني ثابت بالنسبة لنقطة من سطح الأرض رغم دوران الأرض و دوره مساوي لدور الأرض .

- ارتفاع القمر الجيومستقر :

إذا كان z هو ارتفاع القمر الاصطناعي بالنسبة للأرض و كان R هو نصف قطر الأرض يكون : $r = R + z$

و منه يمكن كتابة :

$$\frac{T^2}{(R+z)^3} = \frac{4\pi^2}{G . M_T}$$

$$(R+z)^3 = \frac{T^2 G \, M_T}{4\pi^2} \rightarrow (R+z) = \sqrt[3]{\frac{T^2 \, G \, M_T}{4\pi^2}} \rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{T^2 \, G \, M_T}{4\pi^2}} - R$$

$$T = (23 \, . \, 3600) + (56 \, . \, 60) = 86160 \text{ s}$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{(86160)^2 \, . \, 6.67 \, . \, 10^{-11} \, . \, 5.98 \, . \, 10^{24}}{4\pi^2}} - 6.37 \, . \, 10^6 = 3.5816 \; 10^7 \text{ m} = 35816 \text{ km}$$

- سرعة القمر الاصطناعي على مساره :

مما سبق يمكن كتابة :

$$v = \sqrt{\frac{G \, . M_T}{(R+z)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.67.10^{-11}.5.98.10^{24}}{(3.37.10^{6} + 3.58.10^{7}}} = 3191\,m/s$$

التمرين (3) :

كوكب كتلته m يدور حول الشمس ذات الكتلة M متبعا مسارا نعتبره دائريا مركزه o هو مركز عطالة الشمس .

1- بين أن حركة مركز عطالة هذا الكوكب دائرية منتظمة بالنسبة للمرجع الهيليو مركزي .

2- أوجد عبارة سرعة الكوكب v بدلالة كل من ثابت الجذب العام G ، كتلة الشمس M و البعد r بين مركزي العطالة لكل من الكوكب و الشمس .

3- اذكر نص قانون كبلر الثالث .

4- كوكبا الأرض و المريخ يدوران حول الشمس على مدارين يمكن اعتبارهما دائريين ، مركزهما هو مركز الشمس o . استنتج قيمة r_m نصف قطر مدار المريخ .

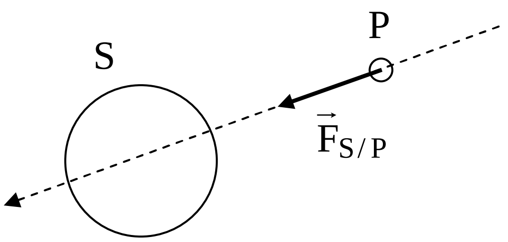
المعطيات :

- ثابت الجذب العام : $G = 6.67 \,.\, 10^{-11}$ SI .
- نصف قطر مدار الأرض حول الشمس : $r_t = 150 \,.\, 10^{6}$ km .
- مدة دوران الأرض حول الشمس : $T_t = 365.25$ j .
- مدة دوران كوكب المريخ حول الشمس : $T_m = 687$ j .

الأجوبة :

1- إثبات أن حركة الكوكب دائرية :

- الجملة المدروسة : كوكب (P) .
- مرجع الدراسة : هيليو مركزي .
- القوى الخارجية المؤثرة : القوة $\vec{F}_{S/P}$ الناتجة عن جذب الشمس للكوكب



- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\sum \vec{F}_{S/P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين المماسي و الناظمي :

$$\begin{cases} 0 = m.a_t \,......................\, (1) \\ F = m.a_n \,......................\, (2) \end{cases}$$

الطريقة الأولى :

- من العلاقة (1) :

$$a_t = 0$$

و حيث أن : $a_t = \frac{dv}{dt}$ يكون :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \;\rightarrow\; v = C$$

أي أن سرعة القمر الاصطناعي ثابتة ، و كون أن مساره دائري ، تكون حركته دائرية منتظمة .

الطريقة الثانية :

نحسب قيمة التسارع :

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2}$$

- من العلاقة (1) و مما سبق وجدنا : $a_t = 0$.

من العلاقة (2) نكتب :

$$\frac{G.m.M}{r^2} = m\,a_n \;\rightarrow\; a_n = \frac{GM}{r^2}$$

و منه يصبح :

$$a = a_n = \frac{GM}{r^2}$$

G ، M ، r ثوابت ، منه التسارع يكون ثابت ، و كون أن المسار دائري ، فحركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة .

2- عبارة v بدلالة G ، M ، r :

من العلاقة (2) :

$$F = m\,a_n$$

$$G\frac{mM}{r^2} = m\,a \;\rightarrow\; G\frac{M}{r^2} = a_n$$

و حيث أن حركة الكوكب دائرية منتظمة يكون $a_n = \frac{v^2}{r}$ و منه يصبح :

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

3- قانون كبلر الثالث :

يتناسب مربع دور كوكب T مع مكعب البعد المتوسط r للكوكب عن الشمس أي :

$$T^2 = \alpha\, r^3$$

أو :

$$\frac{T_1^{\,2}}{r_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{r_2^{\,3}} = \frac{T_3^{\,2}}{r_3^{\,3}} = ... = \alpha$$

حيث α هو ثابت التناسب

4- نصف قطر كوكب المريخ :

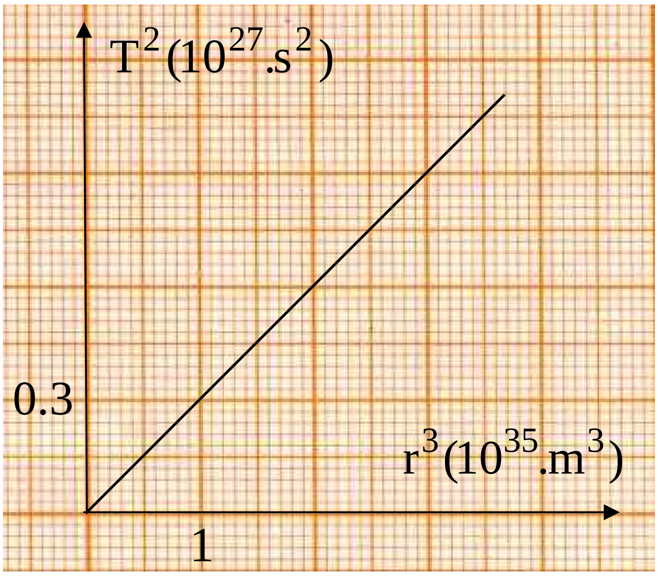
بتطبيق قانون كبلر الثالث بالنسبة لكوكب الأرض t و كوكب المريخ m نكتب :

$$\frac{T_t^{\,2}}{r_t^{\,3}} = \frac{T_m^{\,2}}{r_m^{\,3}} \rightarrow r_m = \sqrt[3]{\frac{T_m^{\,2}.\,r_t^{\,3}}{T_t^{\,2}}}$$

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{(687\ \text{jours})^2\,(150.10^6\ \text{km})^3}{(365.25\ \text{jours})^2}} = 2.29\,.10^8\,\text{km}$$

التمرين (4) :

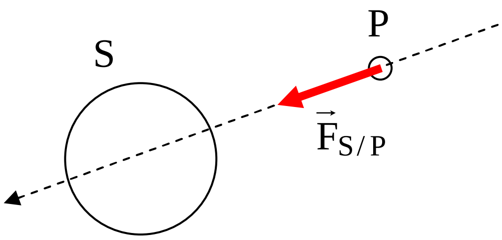
مسار الكوكب حول الشمس اهليليجي و من أجل التبسيط ننمذجه في المرجع الهيليومركزي بمدار دائري مركزه O (مركز الشمس) و نصف قطره r.
باستعمال برمجية "satellite" في جهاز الإعلام الآلي تم رسم البيان $T^2 = f(r^3)$ (الشكل-6) . حيث T دور الحركة



1- ندرس حركة الكوكب في المرجع المركزي الشمسي (الهيليومركزي) الذي نعتبره غاليليا ، عرف المرجع المركزي الشمسي .
2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب و باهمال تأثيرات الكواكب الأخرى ، أوجد عبارة كل من السرعة v و دور حركة الكوكب T بدلالة G ، M ، r .
3- اعتمادا على البيان :
أ- استنتج نص قانون كبلر الثالث .
ب- أوجد كتلة الشمس .
يعطى : $G = 6.67 . 10^{-11}$ SI .

الأجوبة :

1- تعريف المرجع المركزي الشمسي :
هو مرجع مبدأ معلمه منطبق على مركز الشمس و محاوره الثلاث تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة نعتبرها ثابتة بالنسبة لمركز الشمس .
2- عبارة v دلالة G ، M ، r :
- الجملة المدروسة : كوكب .
- مرجع الدراسة : هيليو مركزي .
- القوى الخارجية المؤثرة : القوة $\vec{F}_{S/P}$ الناتجة عن جذب الشمس للكوكب (قوة الجذب العام)



- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{F}_{S/P} = m\,\vec{a}$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور الناظمي :

$F = m\,a_n$

$$\frac{G.mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{G.M}{r} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$$

● عبارة T بدلالة G ، M ، r :

لدينا :

$$T = \frac{2\pi.r}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi.r}{\sqrt{\frac{G.M}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2.r}{\frac{G.M}{r}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2.r^3}{G.M} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2.r^3}{G.M}}$$

3- أ- نص قانون كبلر الثالث :

المنحنى $T^2 = f(r^3)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $T^2 = k\,r^3$ ، حيث k هو ميل المنحنى المستقيم ، نستنتج من ذلك أن مربع حركة كوكب حول الشمس يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط r بين مركز الكوكب و مركز الشمس ، و هو القانون الثالث لكبلر .

ب- كتلة الشمس :

- من البيان لدينا :

$T^2 = k\,r^3$ .... (1)

و لدينا مما سبق :

$T = \frac{4\,\pi^2}{GM}\,r^3$ .... (2)

بمطابقة العلاقتين (1) ، (2) :

$$\frac{4\pi^2}{GM} = k \rightarrow \frac{4\pi^2}{G.a}$$

- نحسب الميل :

$$k = \frac{0.3\ .\ 10^{17}}{1\ .10^{35}} = 3\ .10^{-19}$$

$$M = \frac{4\,.\,\pi^2}{6.67\ .\ 10^{-11}\,.\ 3\ .10^{-19}} = 1.97\ .\ 10^{30}\ kg$$

تمارين مقترحة

التمرين (5) : (بكالوريا 2008 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 01 على الموقع)

يدور قمر اصطناعي كتلته (m) حول الأرض بحركة منتظمة ، فيرسم مسارا دائريا نصف قطره (r) و مركزه هو نفسه مركز الأرض .

1- مثل قوة جذب الأرض للقمر الاصطناعي و اكتب عبارة قيمتها بدلالة M_T ، m ، G ، r حيث :
M_T كتلة الأرض ، m كتلة القمر الاصطناعي ، G ثابت الجذب العام ، r نصف قطر المسار (البعد بين مركزي الأرض و القمر الاصطناعي) .

2- باستعمال التحليل البعدي أوجد وحدة ثابت الجذب العام (G) في الجملة الدولية (SI) .

3- بين أن عبارة السرعة الخطية (v) للقمر الاصطناعي في المرجع المركزي الأرضي تعطى بـ : $v=\sqrt{\dfrac{G\,.\,M_T}{r}}$

4- أكتب عبارة (v) بدلالة r و T حيث T دور القمر الاصطناعي .

5- أكتب عبارة دور القمر الاصطناعي حول الأرض بدلالة M_T ، G ، r .

6- أ) بين أن النسبة ($\dfrac{T^2}{r^3}$) ثابتة لأي قمر يدور حول الأرض ، ثم احسب قيمتها العددية في المعلم المركزي الأرضي مقدرة بوحدة الجملة الدولية (SI) .

ب) إذا كان نصف قطر مسار قمر اصطناعي يدور حول الأرض $r = 2.66\ .\ 10^4\ km$ ، أحسب دور حركته .

يعطى : ثابت الجذب العام : $G = 6.67\ .\ 10^{-11}\ SI$ ، $\pi^2 = 10$ ، كتلة الأرض : $M_T = 5.97\ .\ 10^{24}\ kg$.

أجوبة مختصرة :

2) $[G]=m^3/s^2.kg$ ، 3) $v=\sqrt{\dfrac{G.M_T}{r}}$ ، 4) $v=\dfrac{2\pi\, r}{T}$ ، 5) $T=\sqrt{\dfrac{4\pi^2\, r^3}{G.M_T}}$

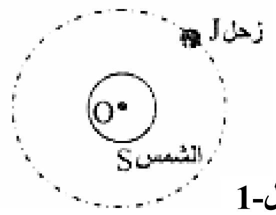
6- أ) $\dfrac{T^2}{r^3}=\dfrac{4\pi^2}{G.M_T}$ ، π ، G ، M_T ثوابت ، و منه تكون النسبة $\dfrac{T^2}{r^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الاصطناعية .

ب) $T == 4.348.10^4\ s$

التمرين (6) : (بكالوريا 2008 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 02 على الموقع)

المعطيات :

كتلة الشمس	$M_T = 2.0\ .\ 10^{30}\ kg$
نصف قطر مسار زحل	$r = 7.8\ .\ 10^8\ km$
ثابت الجذب العام	$G = 6.67\ .\ 10^{-11}\ SI$



الشكل-1

يدور كوكب زحل حول الشمس على مسار دائري مركزه ينطبق على مكز العطالة (O) للشمس ، بحركة منتظمة (الشكل-1) .

1- مثل القوة التي تطبقها الشمس على كوكب زحل ثم أعط عبارة قيمتها .

2- ندرس حركة كوكب زحل في المرجع المركزي الشمسي (الهيليومركزي) الذي نعتبره غاليليا .

أ- عرف المرجع المركزي الشمسي .
ب- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أوجد عبارة التسارع (a) لحركة مركز عطالة كوكب زحل .
جـ- أوجد العبارة الحرفية للسرعة (v) للكوكب في المرجع المختار بدلالة ثابت الجذب العام (G) و كتلة الشمس (M_S) و نصف قطر المدار (r) ، ثم أحسب قيمتها .
3- أوجد عبارة الدور (T) لكوكب زحل حول الشمس بدلالة نصف قطر المدار (r) و السرعة (v) ، ثم أحسب قيمته
4- استنتج عبارة القانون الثالث " لكبلر" و أذكر نصه .

أجوبة مختصرة :

2- أ) هو مرجع مرتبط بالشمس مبدأ معلمه منطبق على مركز الشمس و محاروه الثلاث متجهة نحو ثلاث نجوم ثابتة بالنسبة لمركز الشمس ، ب) $a_G = \frac{G.M_S}{r^2}$ ، جـ) $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}} = 1.3.10^4 \text{ m/s}$

3) $T = \frac{2\pi r}{v} = 3.768.10^8 \text{ s}$

4) $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$ ، π ، G ، M_T ثوابت ، و منه تكون النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الاصطناعية ، هذا يعني أن مربع الدور لكوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط بين مركز الكوكب و الشمس و هو نص القانون الثالث لكبلر .

التمرين (7) : (بكالوريا 2009 – علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 07 على الموقع)

يدور قمر اصطناعي كتلته (m_S) حول الأرض في مسار دائري على ارتفاع (h) من سطحها .
نعتبر الأرض كرة نصف قطرها (R) ، و ننمذج القمر الإصطناعي بنقطة مادية .
تدرس حركة القمر الاصطناعي في المعلم المركزي الأرضي الذي نعتبره غاليليا .
1- ما المقصود بالمعلم المركزي الأرضي ؟
2- أكتب عبارة القانون الثالث لكبلر بالنسبة لهذا القمر .
3- أوجد العبارة الحرفية بين مربع سرعة القمر (v^2) و (G) ثابت الجذب العام ، M_T كتلة الأرض ، h و R .
4- عرف القمر الجيو مستقر و أحسب ارتفاعه (h) و سرعته (v) .
5- أحسب قوة جذب الأرض لهذا القمر . اشرح لماذا لا يسقط على الأرض رغم ذلك .
المعطيات : دور حركة الأرض حول محورها : $T \approx 24 \text{ h}$.
$M_T = 5.97 . 10^{24} \text{ kg}$ ، $G = 6.67 . 10^{-11} \text{ Nm}^2.\text{kg}^{-2}$
$R = 6400 \text{ km}$ ، $m_S = 2.0 . 10^3 \text{ kg}$.

أجوبة مختصرة :

1) المعلم المركزي الأرض هو معلم مبدأه منطبق مركز الأرض و محاوره الثلاث متجهة نحو ثلاث نجوم بعيدة تكون ثابتة بالنسبة لمركز الأرض .

2) $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi}{G.M_T}$ ، 3) $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R+h)}}$

4) هو قمر يدور في جهة دوران الأرض و دوره مساوي لدور حركة الأرض .

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2.G.M_T}{4\pi^2}} - R = 3.5841.10^7 \text{ m} = 35841 \text{ km} \quad ، \quad v = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R+h)}} = 3070.3 \text{ m/s}$$

5) $F = G\dfrac{M_T.m_s}{(R+h)^2} = 446.3\,N$ ، القمر الاصطناعي خاضع إلى قوة ناتجة عن جذب الأرض له ، و كون أنه لا يسقط فهذا ناتج عن تأثير قوة ثابتة معاكسة للقوة الأولى ، هذه القوة الثانية ناتجة عن الفعل الطبيعي المؤثر على القمر الاصطناعي نتيجة دورانه حول الأرض .

التمرين (8) : (بكالوريا 2011 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 12 على الموقع)

ألسات 1 (Alsat 1) قمر اصطناعي جزائري متعدد الاستخدامات كتلته $m_S = 90\ kg$ ، أرسل إلى الفضاء بتاريخ 28 نوفمبر 2002 من محطة الفضاء الروسية ، يدور حول الأرض وفق مسار إهليليجي و دوره $T = 98\ min$.

1- لأجل دراسة حركته نختار مرجعا مناسبا .

أ- اقترح مرجعا لدراسة حركة القمر الإصطناعي حول الأرض و عرفه .

ب- ذكر بنص القانون الثاني لكبلر .

2- بفرض أن القمر الإصطناعي (Alsat 1) يدور حول الأرض وفق مسار دائري على ارتفاع h عن سطحها .

أ- مثل قوة جذب الأرض بالنسبة للقمر الإصطناعي .

ب- اكتب العبارة الحرفية لشدة قوة جذب الأرض للقمر الاصطناعي بدلالة : M_T ، m_S ، G ، h ، R_T .

جـ- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، تحقق أن عبارة سرعة القمر الاصطناعي المدارية هي من الشكل :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \quad \text{حيث : } r = R_T + h$$

د- عرف الدور T و اكتب عبارته بدلالة : M_T ، G ، r .

هـ- احسب الارتفاع h الذي يتواجد عليه القمر الاصطناعي (Alsat 1) عن سطح الأرض .

المعطيات : ثابت التجاذب الكوني : $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ SI$ ، كتلة الأرض : $M_T = 6 \cdot 10^{24}\ kg$ ، نصف قطر الأرض : $R_T = 6.38 \cdot 10^3\ km$.

أجوبة مختصرة :

1- أ) المرجع المناسب لدراسة حركة القمر الاصطناعي هو المرجع المركزي الأرضي (جيومركزي) .

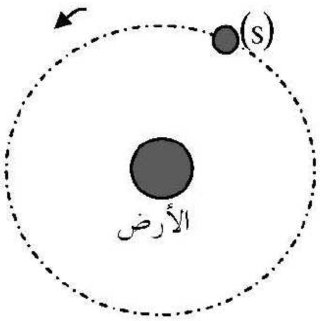
ب) ينص على ما يلي : " مربع دور كوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط بين مركز الكوكب و مركز الشمس "

2- ب) $F_{T/S} = G\,.\dfrac{M_T.m_S}{r^2} = G.\dfrac{M_T.m_S}{(R_T+h)^2}$.

د) الدور هو الزمن اللازم لانجاز دورة واحدة ، $T = \sqrt{\dfrac{4\,\pi^2\,r^3}{G.M_T}}$

هـ) $h = \sqrt[3]{\dfrac{T^2.G.M_T}{4\pi^2}} - R = 672950\,m = 672.95\,km$

التمرين (9): (بكالوريا 2013 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 18 على الموقع)



3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِدْ العبارة الحرفية لسرعة القمر الاصطناعي بدلالة: ثابت الجذب العام G، كتلة الأرض M_T، نصف قطر الأرض R_T وارتفاع مركز عطالة القمر الاصطناعي عن سطح الأرض h، ثمّ احسب قيمتها.

4- أ- جِدْ عبارة دور القمر الاصطناعي بدلالة: R_T ، h ، G ، M_T ، ثمّ احسب قيمته.

ب- هل يمكن اعتبار هذا القمر جيو مستقر ؟ علّل.

5- ذكّر بالقانون الثالث لكبلر، ثمّ بيّن أن النسبة: $\frac{T^2}{(R_T+h)^3}=k$ ، حيث: k ثابت يطلب حسابه.

الشكل-6

يعطى: $G=6,67\times10^{11}$ (SI), $M_T=6,0\times10^{24}$ kg , $R_T=6380$ km , $h=35800$ km , $\pi^2=10$

أجوبة مختصرة :

2) المرجع المناسب لدراسة حركة القمر الاصطناعي هو المرجع المركزي الأرضي ، تعريف : هو مرجع مركزه مركز الأرض و له ثلاث محاور تتجه نحو ثلاث نجود جد بعيدة ثابتة بالنسبة لمركز الأرض .

3) $v=\sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}=3080.24\ \text{m/s}$ ،

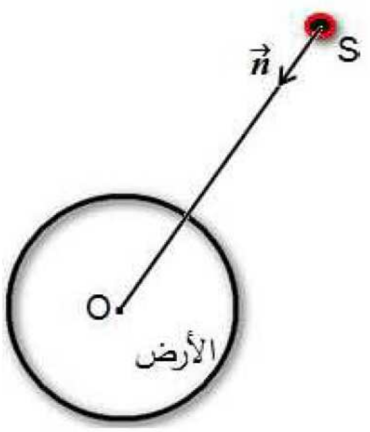
4) $T=\frac{2\pi(R_T+h)}{v}=2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h^3)}{G.M_T}}=85996.54\ \text{s}=24\ \text{h}$ ، نعم يمكن اعتبار هذا القمر جيو مستقر لأن جهة دورانه بجهة دوران الأرض و دوره يساوي دور الأرض حول نفسها .

5) قانون كبلر الثالث : النسبة بين مربع دور القمر و مكعب البعد بين مركزي القمر و الأرض يساوي مقدار ثابت .

$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM_T}=10^{-13}$.

التمرين (10): (بكالوريا 2013 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 19 على الموقع)

يدور قمر اصطناعي (S) حول الأرض بحركة دائرية منتظمة على ارتفاع $h=700$ km من سطحها ، حيث ينجز 14.55 دورة في اليوم الواحد . نفرض أن المرجع الأرضي المركزي مرجع غاليلي .



1- مثل شعاع التسارع $\vec{a}$ لحركة القمر الاصطناعي (S) (الشكل) .

2- أعط دون برهان عبارة شعاع التسارع $\vec{a}$ لحركة القمر الإصطناعي (S) ، بدلالة v سرعة القمر الإصطناعي (S) . بدلالة v سرعة القمر الإصطناعي (S) و نصف القطر r لمسار حركة القمر الاصطناعي حول الأرض ، و شعاع الوحدة $\vec{n}$.

3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن عبارة سرعة القمر الاصطناعي (S) حول حركة كوكب الأرض تعطى بالعلاقة :

$v=\sqrt{\frac{G.M_T}{r}}$ ، حيث : M_T كتلة الأرض

4- اكتب العلاقة بين T_S ، و r ، حيث : T_S دور القمر الاصطناعي (S) حول

الأرض .

5- بين أن : $\frac{T^2{}_S}{r^3} = 9.85.10^{-14}\ s^2.m^{-3}$.

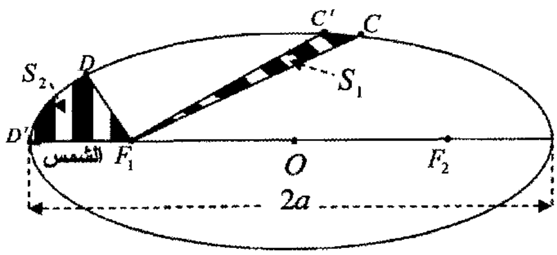
6- استنتج M_T كتلة الأرض .

<u>يعطى :</u>

- ثابت التجاذب الكوني : $G = 6.67\ .\ 10^{-11}$ SI .
- نصف قطر الأرض : $R_T = 6400$ km .
- دور الأرض : T = 24 h .

التمرين (12) : (بكالوريا 2010 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 10 على الموقع)

أ/ يكون مسار حركة مركز عطالة كوكب حول الشمس اهليليجيا كما يوضحه (الشكل-4) .



(الشكل-4)

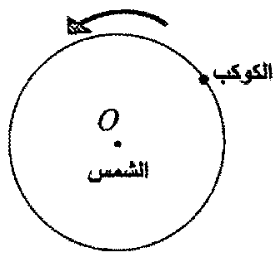
ينتقل الكوكب أثناء حركته على مداره من النقطة C إلى النقطة 'C ثم من النقطة D إلى النقطة 'D خلال نفس المدة الزمنية Δt .

1- اعتمادا على قانون كبلر الأول فسر وجود موقع الشمس في النقطة F_1 ، كيف نسمي عندئذ النقطتين F_1 ، F_2 ؟

2- حسب قانون كبلر الثاني ما هي العلاقة بين المساحتين S_1 و S_2 ؟

3- بين أن متوسط السرعة بين الموضعين C و 'C أقل من متوسط السرعة بين الموضعين D و 'D .

ب/ من أجل التبسيط ننمذج المسار الحقيقي لكوكب في المرجع الهيليومركزي بمدار دائري مركزه O (مركز الشمس) و نصف قطره r (الشكل-5) .

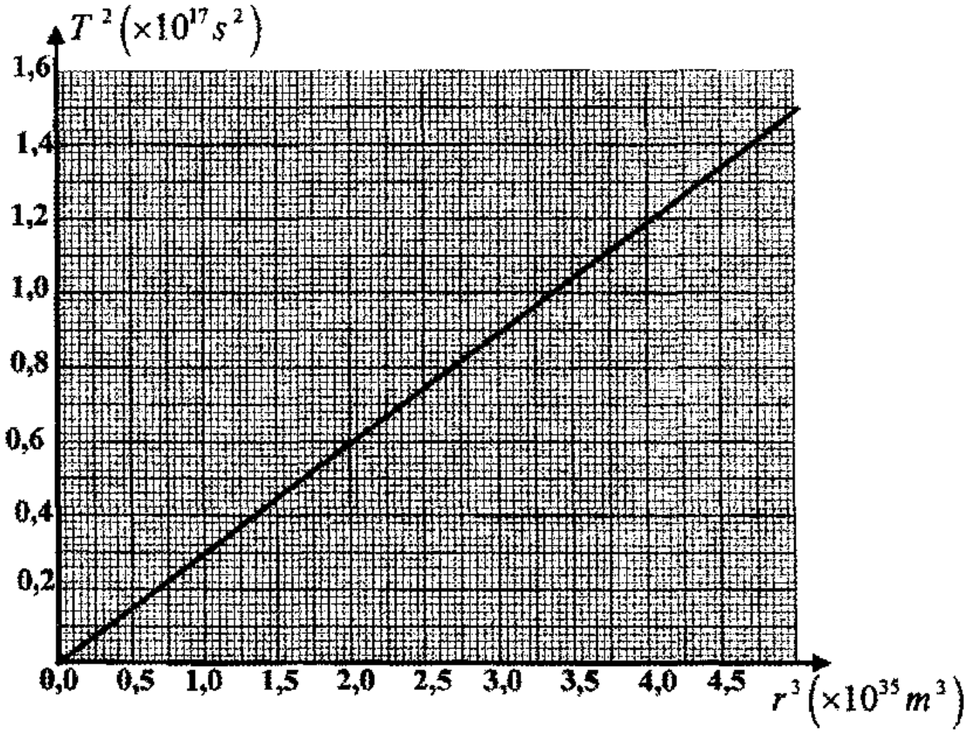


(الشكل-5)

يخضع كوكب أثناء حركته حول الشمس إلى تأثيرها و الذي ينمذج بقوة $\vec{F}$ ، قيمتها تعطى حسب قانون الجذب العام لنيوتن بالعلاقة :

$F = G\frac{mM}{r^2}$ ، حيث M كتلة الشمس ، m كتلة الكوكب و G ثابت التجاذب الكوني $G = 6.67\ .\ 10^{-11}$ SI

باستعمال برمجية "satellite" في جهاز الإعلام الآلي تم رسم البيان $T^2 = f(r^3)$ (الشكل-6) . حيث T دور الحركة



(الشكل-6)

1/ أذكر نص قانون كبلر الثالث .

2/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب و باهمال تأثيرات الكواكب الأخرى ، أوجد عبارة كل من v سرعة الكوكب ، و دور حركته T بدلالة r ، G ، M .

3/ أوجد بيانيا العلاقة بين T^2 و r^3 .

4/ أوجد العلاقة النظرية بين T^2 و r^3 .

5/ بتوظيف العلاقتين الأخيرتين استنتج قيمة كتلة الشمس M .

أجوبة مختصرة :

أ-1) - وجود الشمس في النقطة F_1 يفسر بمسار الكوكب الإهليليجي و الذي تمثل الشمس أحد محرقيه ، تسمى النقطتين F_1 ، F_2 محرقا المدار الإهليليجي .

2) حسب قانون كبلر الثاني يكون : $S_1 = S_2$

3) من (الشكل-4) المعطى ، $D'D > C'C$ ، و كون أن الكوكب يقطع المسافتين C'C ، D'D في نفس المدة الزمنية يكون بقسمة الطرفين على الزمن : $v_{(C'C)} < v_{(D'D)}$.

ب-1) ينص على ما يلي : " مربع دور الكوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس "

2) $v^2 = \dfrac{GM}{r}$ ، $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 r^3}{GM}}$.

3) البيان $T^2 = f(r^3)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ لذا يكون : $T^2 = \alpha\, r^3$ ، حيث α ميل هذا المستقيم .

4) $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} r^3$.

5) - بمطابقة مع العلاقتين البيانية و النظرية ، و بعد حساب الميل نجد : $M = 1.97.10^{30}$ Kg .

سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

عرض نظري و تمارين

05

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

****

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

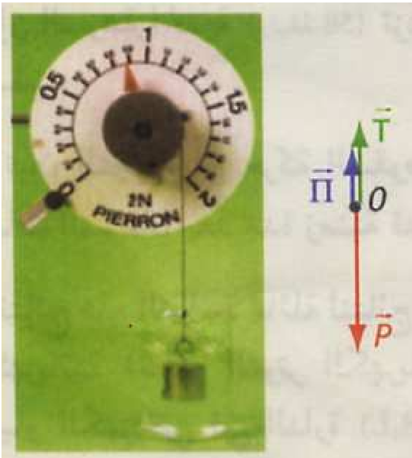
المحتوى المفاهيمي : 04

السقوط الحقيقي للأجسام في الهواء

• القوى المؤثرة على جسم صلب يسقط في الهواء :

- أثناء سقوط جسم صلب في الهواء تحدث تأثيرات متبادلة بين هذا الجسم الصلب و الوسط الخارجي تتمثل في الهواء ، الأرض ، ..... .

و ينتج عن هذه التأثيرات خضوع الجسم الصلب إلى قوى أهمها :



▪ **قوة الثقل :**

- يرمز لها بـ $\vec{P}$ ناتجة عن تأثير الأرض على الجسم الصلب .

- تتناسب قوة الثقل $\vec{P}$ مع شعاع حقل الجاذبية $\vec{g}$ وفق العلاقة الشعاعية : $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

- بجوار سطح الأرض أين يكون شعاع حقل الجاذبية ثابت و عمودي على سطح الأرض (الشكل-34) تكون قوة الثقل ثابتة و متجهة عموديا نحو سطح الأرض في كل نقطة من حقل الجاذبية الأرضية .
- شدة قوة ثقل جسم صلب كتلته m موجود في نقطة من حقل الجاذبية الأرضية شدته g عند هذه النقطة يعطى بالعبارة :

$$\boxed{P = m\,g}$$

▪ دافعة أرخميدس :

- كل جسم صلب مغمور في مائع (هواء أو سائل) يخضع لفعل ميكانيكي يدعى دافعة أرخميدس.
- ننمذج دافعة أرخميدس بقوة شاقولية يرمز لها بـ $\vec{\Pi}$ متجهة نحو الأعلى قيمتها تساوي ثقل المائع المزاح و عليه يعبر عنها بالعلاقة :

$$\boxed{\Pi = \rho\ Vg}$$

حيث : ρ : الكتلة الحجمية للمائع يقدر بـ kg/m^3.
V : حجم المائع المنزاح و يساوي حج الجسم الصلب يقدر بـ m^3.
g : الجاذبية تقدر بـ m/s^2.

▪ قوة الإحتكاك :

- يخضع كل جسم صلب يتحرك في مائع لعدة قوى موزعة على سطحه ، تتعلق بطبيعة المائع و شكل الجسم الصلب و كذا خشونة السطح .
- تزداد قيمة هذه القوى بتزايد السرعة.
- يمكن نمذجة المجموع الشعاعي لهذه القوى التلامسية بقوة شاقولية ، معاكسة لجهة الحركة ، تدعى قوة الإحتكاك.
- التعبير عن قوة الاحتكاك بدلالة السرعة معقد ماعدا في الحالتين التاليتين :
  - عندما تكون السرعة ضعيفة تكون قيمة القوة متناسبة مع قيمة السرعة : $f = kv$
  - عندما تكون قيمة السرعة كبيرة تكون قيمة القوة متناسبة مع مربع قيمة السرعة : $f = kv^2$
- في كلتي الحالتين ، الشعاع $\vec{f}$ معاكس للشعاع $\vec{v}$.

ملاحظة :

سقوط الأجسام الصلبة في السوائل يشبه سقوط الأجسام الصلبة في الهواء.

التمرين (1):

2- نغمر كليا جسما صلبا حجمه $V = 5.0\ cm^3$ و كتلته الحجمية $\rho = 8.9\ g/cm^3$ ، في مائع كتلته الحجمية ρ' ، باعتبار $g = 9.8\ N/kg$:

أ- أحسب ثقل هذا الجسم .
ب- أحسب قيمة دافعة ارخميدس في الحالة التي يكون فيها المائع هو الماء حيث $\rho' = 1.0\ g.cm^{-3}$.
جـ- أحسب قيمة دافعة أرخميدس في الحالة التي يكون فيها المائع هو الهواء حيث : $\rho'' = 1.3\ .\ 10^{-3}\ g.cm^{-3}$.

الأجوبة :

2- ثقل الجسم :

$$P = m\,g \rightarrow P = \rho\,V\,g$$

نحسب قيمة m :

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho V$$

$$m = 8.9 . 5 = 44.5 g$$

ومنه يكون الثقل :

$$P = 44.5 . 10^{-3} . 9.8 = 0.47 N$$

ب- قيمة دافعة أرخميدس حيث المائع هو الماء :

دافعة أرخميدس هي ثقل المائع المنزاح عندم يغمر فيه الجسم الصلب و عليه :

$$\Pi = m' g = \rho' V' g$$

حجم الماء المنزاح يساوي حجم الجسم المغمور في الماء و الذي حل محل المائع المنزاح ، أي $V = V'$ ومنه :

$$\Pi = \rho' V g$$

$$\Pi = 10^{-3} . 5 . 9.8 = 4.9 . 10^{-2} N$$

جـ- دافعة أرخميدس حيث يكون الماء هو الهواء :

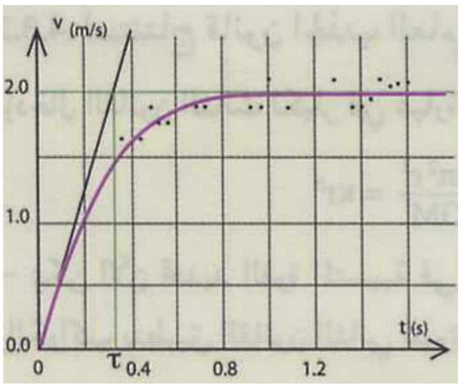
$$\Pi' = \rho'' V g$$

$$\Pi' = 1.3 . 10^{-3} . 10^{-3} . 5 . 9.8 = 6.37 . 10^{-5} N$$

• دراسة حركة السقوط الحقيقي لجسم صلب في الهواء :

- نعتبر جملة مادية مكونة من أربعة بالونات خفيفة مثقلة بجسم له كتلة $m = 19g$ و حجم $v = 5.41$. و ذو حجم كاف لبلوغ السرعة الحدية بعد قطع 2m تقريبا من السقوط ، و أن لا يسمح شكل الجملة بدورانه خلال السقوط لتكون الحركة انسحابية شاقولية (الشكل) .

- البيان التالي يمثل تطور سرعة البالونات بدلالة الزمن .



- من البيان يتضح وجود نظامين :

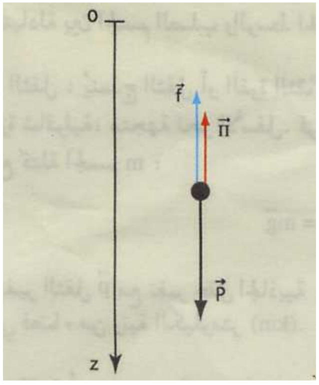
▪ نظام إنتقالي : تكون فيه قيمة السرعة متزايدة بشكل سريع في البداية و أقل فأقل مع مرور الزمن. إذن حركة البالونات متسارعة في هذه المرحلة . (النظام الانتقالي)

▪ نظام دائم : تكون فيه قيمة السرعة ثابتة حيث تبلغ قيمتها الحدية $v_\ell = 2.0\ m/s$ في هذه المرحلة و تصبح حركة البالونات منتظمة.

<u>الزمن المميزللسقوط τ :</u>

يقطع مماس البيان $v(t)$ عند اللحظة $t = 0$ في حالة $f = kv$ الخط المقارب $v = v_\ell$ في لحظة تمثل مقدار يدعى الزمن المميز للسقوط يرمز له بـ τ و وحدته الثانية s .

● إبراز المعادلة التفاضلية :



- الجملة المعتبرة : بالونات .
- مرجع الدارسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ؛ دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الإحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\ \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية على المحور (Oz) :

$$P - \Pi - f = m\,a_z$$

$$m\,g - \rho_{air} V_{air} - f = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{1}{m} f = \frac{m\,g - \rho_{air} V_{air}\,g}{m}}$$

- إن الشكل النهائي للمعادلة التفاضلية له علاقة بشكل قيمة قوة الإحتكاك f .

▪ <u>من أجل $f = kv$:</u>

تكون المعادلة من الشكل :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m} v = \frac{m\,g - \rho_{air} V_{air}\,g}{m}}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها من الشكل :

$$\boxed{v = v_\ell\,(1 - e^{-t/\tau})}$$

حيث $\tau = \dfrac{m}{K}$ هو الزمن المميز للسقوط و هندسيا يحسب من خلال تقاطع مماس البيان $v = f(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب في النظام الدائم .

- في النظام الدائم أين يكون $\frac{dv}{dt} = 0$ و تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ يكون بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{K}{m} v_\ell = \frac{m\,g - \rho_{air} V_{air}\, g}{m}$$

$$K v_\ell = mg - \rho_{air}\, V_{air}\, g$$

$$K v_\ell = \rho_S\, V_S\, g - \rho_{air}\, V_{air}\, g$$

حجم المائع (الهواء) المنزاح هو نفسه حجم الجملة S بمعنى $V_{air} = V_S$ و منه يصبح :

$$K v_\ell = \rho_S\, V_S\, g - \rho_{air}\, V_S\, g$$

$$K v_\ell = V_S\, g\, (\rho_S - \rho_{air})$$

$$\boxed{v_\ell = \frac{V_S \cdot g}{K} (\rho_S - \rho_{air})}$$

▪ من أجل $f = kv^2$:

تكون المعادلة من الشكل :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m} v^2 = \frac{m\,g - \rho_{air} V_{air}\, g}{m}}$$

- في النظام الدائم أين يكون $\frac{dv}{dt} = 0$ و تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ يكون بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{k}{m} v_\ell^2 = \frac{m\,g - \rho_{air} V_{air}\, g}{m}$$

$$k v_\ell^{\,2} = mg - \rho_{air}\, V_{air}\, g$$

$$k v_\ell^{\,2} = \rho_S\, V_S\, g - \rho_{air}\, V_{air}\, g$$

حجم المائع (الهواء) المنزاح هو نفسه حجم الجملة S بمعنى $V_{air} = V_S$ و منه يصبح :

$$k v_\ell^{\,2} = \rho_S\, V_S\, g - \rho_{air}\, V_S\, g$$

$$k v_\ell^{\,2} = V_S\, g\, (\rho_S - \rho_{air})$$

$$\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{V_S \cdot g}{k} (\rho_S - \rho_{air})}}$$

حالة خاصة :

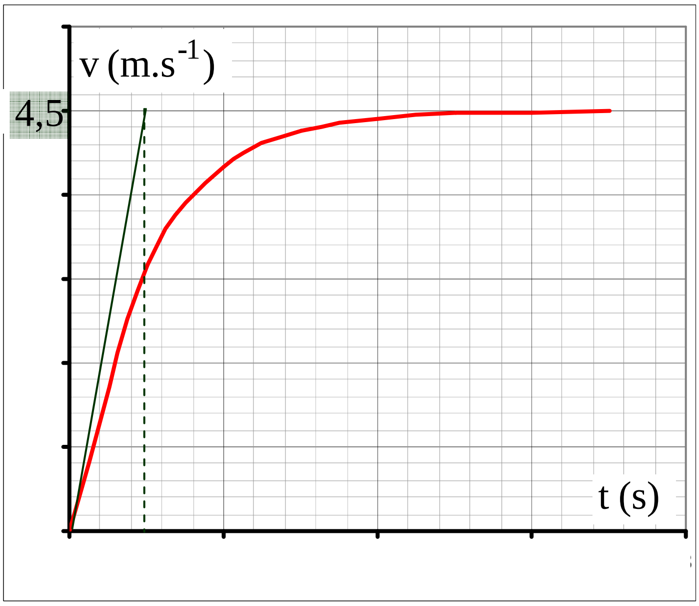
إذا اعتبرنا $f = kv$ و أهملنا دافعة أرخميدس تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m} v = g}$$

التمرين (2) :

يسقط شاقوليا مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100$ kg فيبلغ سرعة ثابتة حدية قيمتها $v_\ell = 4.5$ m.s^{-1} ، نهمل خلال السقوط دافعة أرخميدس أمام القوى الأخرى المطبقة على المظلي و تجهيزه ، نعتبر أن قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء على المظلي من الشكل $f = k\,v^2$. يعطى : $g = 9.8$ m/s^2

المنحنى البياني التالي يمثل تغيرات سرعة (المظلي و مظلته) بدلالة الزمن .



1- أوجد المعادلة التفاضلية التي تعبر عن سرعة حركة مركز عطالة المظلي و تجهيزه .

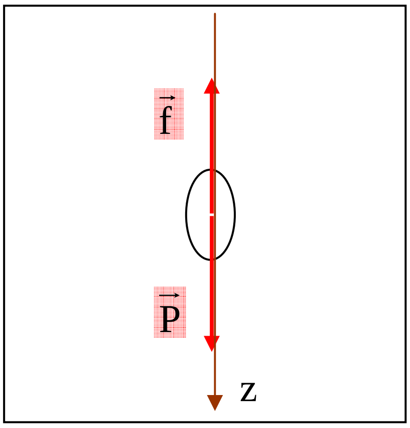
2-. فسر لماذا يمكن للسرعة أن تصبح ثابتة .

3- أحسب المعامل k الذي يتدخل في قوة الاحتكاك .

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : المظلي و تجهيزه .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوى الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور (oz) شاقولي و متجه نحو الأسفل يكون :

$$P - f = m\,a$$
$$m\,g - kv^2 = ma$$

$$m\,g - k\,v^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + k\,v^2 = m\,g \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

2- تفسير الحركة المستقيمة المنتظمة (ثبات السرعة) :

قوة الثقل لا تتغير أثناء الحركة ، في بداية الحركة تكون سرعة الجسم معدومة و بالتالي قوة الاحتكاك تكون معدومة أيضا ، و أثناء الحركة أين تكون حركة (المظلي مع تجهيزه) متسارعة ، تزداد سرعة المضلي مع تجهيزه ما يجعل قوة الاحتكاك تزداد تدريجيا إلى أن تصبح مساوية للثقل في الشدة $P = f$ ، و بالعودة إلى قانون نيوتن الثاني نجد في هذه الحالة :

$$P - f = m\,a$$
$$P - P = m\,a \rightarrow a = 0 \rightarrow v\ (\text{ثابتة})$$

3- قيمة k :

قيمة k ثابتة لا تتعلق بالزمن و عليه يمكن حسابها في أي لحظة من اللحظات .

- نختار اللحظة التي تكون فيها سرعة (المظلي مع تجهيزه) ثابتة و حدية (نظام دائم) أين يكون :

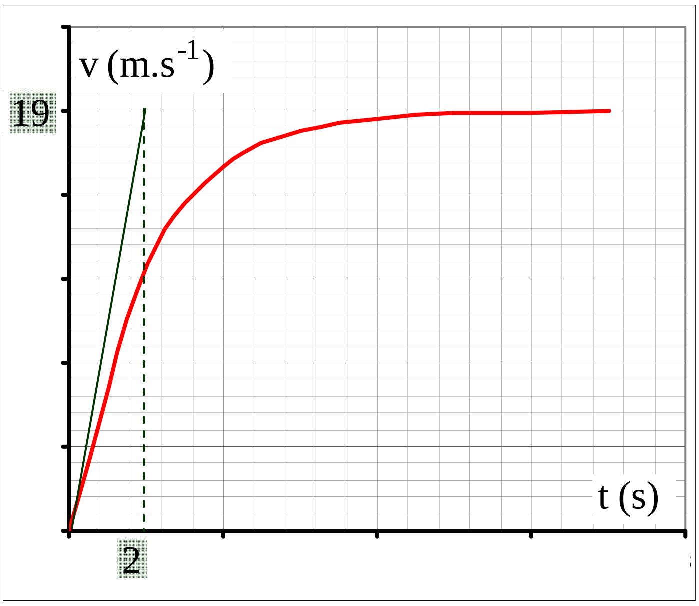
$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ ، } v = v_m = \text{ثابت}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{k}{m} v_m^2 = g$$

$$k = \frac{g \,.\, m}{v_m^2} \quad \to k = \frac{9.8 \,.\, 100}{(4.5)^2} = 48.4 \text{ kg/m}$$

التمرين (3) :



قام فوج من التلاميذ في حصة للأعمال المخبرية بدراسة السقوط الشاقولي لجسم صلب (S) في الهواء كتلته m = 19 g ، و ذلك باستعمال كاميرا رقمية (Webcam) ، عولج شريط الفيديو ببرمجية "Avistep" بجهاز الإعلام الآلي فتحصلوا على البيان v = f(t) الذي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة (S) بدلالة الزمن (الشكل) .

يعطى : $g = 9.8 \text{ N.kg}^{-1}$.

1- حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) في النظامين الإنتقالي و الدائم . علل .

2- بالاعتماد على البيان عين :

أ- السرعة الحدية v_ℓ ، و ثابت الزمن τ المميز للسقوط .

ب- تسارع الحركة في اللحظة t = 0 ، و عند اللحظة t = 12 s ؟

جـ- قيمة الطاقة الحركية للجسم (S) في النظام الدائم .

3- كيف يكون الجسم الصلب (S) متميزا و هذا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظاميين انتقالي و دائم ؟

4- بين أن المعادلة التفاضلية لحركة (S) بالعبارة : $\frac{dv}{dt} + Av = C(1 - \frac{\rho V}{m})$ حيث A و C ثابتين يطلب كتابة عبارتهما ، نذكر أن : ρ الكتلة الحجمية للهواء ، V حجم الجسم (S) .

5- توقع شكل مخطط السرعة عند إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء . علل .

الأجوبة :

<u>1- طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) :</u>

<u>النظام الانتقالي :</u>

المنحنى v = f(t) عبارة عن خط منحني ، و بما أن السرعة متزايدة تكون طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة متسارعة من دون انتظام .

<u>النظام الدائم :</u>

المنحنى v = f(t) عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، إذن طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة .

2- أ- السرعة الحدية v_ℓ ، و ثابت الزمن τ المميز للسقوط :

من البيان مباشرة : $v_\ell = 19\ m/s$ ، $\tau = 2\ s$.

ب- تسارع الحركة في اللحظتين $t = 0$ ، $t = 12\ s$:

تسارع الحركة في لحظة t مساوي لميل مماس المنحنى $v = f(t)$ عند هذه اللحظة و الذي نعتبره $\tan\alpha$ ، لذا يكون :

- $t = 0 \rightarrow \tan\alpha = \dfrac{19}{2} = 9.5 \rightarrow a = 9.5\ m/s^2$
- $t = 12\ s \rightarrow \tan\alpha = 0 \rightarrow a = 0$

جـ- الطاقة الحركية في النظام الدائم :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

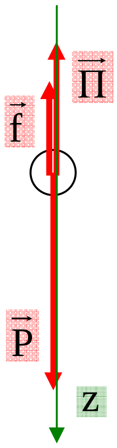
من البيان و في النظام الدائم يكون : $v = v_\ell = 19\ m/s$ و منه :

$$E_C = 0.5\ .\ 19.10^{-3}\ (19)^2 = 3.43\ J$$

3- للحصول على حركة مستقيمة شاقولية إنسحابية في نظامين انتقالي و دائم ، يجب أن يكون الجسم (S) خفيف و ذو حجم كاف لبلغ السرعة الحدية ، كما لا يكون شكله انسيابي كي يجعل تأثير قوة الاحتكاك أكبر .

4- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (oz) :

$$P - \Pi - f = m a$$

$$m.g - m_{air} g - kv = m\frac{dv}{dt} \rightarrow m.g - \rho_{air} V.g - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + k v = m g - \rho_{air} V.g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g - \frac{\rho_{air} V}{m}.g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g\left(1 - \frac{\rho_{air} V}{m}\right)$$

المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + A v = C\left(1 - \frac{\rho_{air} V}{m}\right)$$

حيث : $C = g$ ، $A = \dfrac{k}{m}$.

5- شكل مخطط السرعة عند إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء :

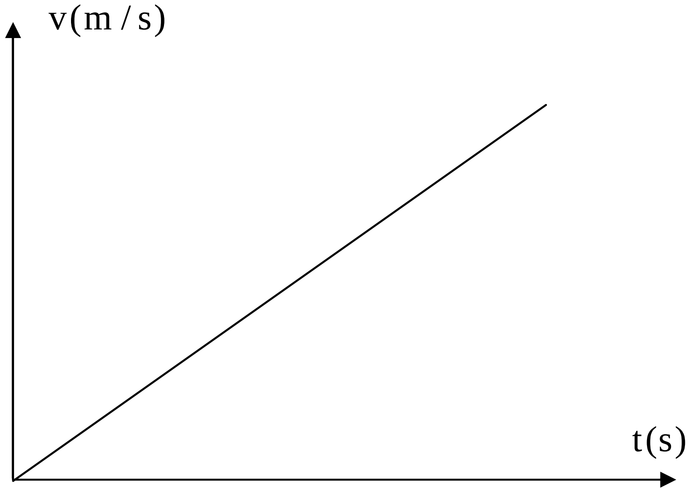
عند إهمال قوة الاحتكاك و كذا دافعة أرخميدس ، تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\frac{dv}{dt} = g \rightarrow v = g\,t + C$$

- من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow v = gt$$

أي أن المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ ، معادلته من الشكل $v = a\,t$ كما يلي :



التمرين (4) :

يسقط مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100\ kg$ سقوطا شاقوليا بدءا من نقطة O بالنسبة لمعلم أرضي دون سرعة ابتدائية . يخضع أثناء سقوطه إلى قوة مقاومة الهواء عبارتها من الشكل $f = k\,v$ (تهمل دافعة أرخميدس) .

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أكتب المعادلة التفاضلية لحركة المظلي بدلالة السرعة $v(t)$.

2- عبر عن السرعة الحدية v_ℓ بدلالة g ، m ، k .

3- بين أن المعادلة تقبل الحل التالي : $v = v_\ell(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$.

4- أكتب العبارة اللحظية لتسارع المظلي .

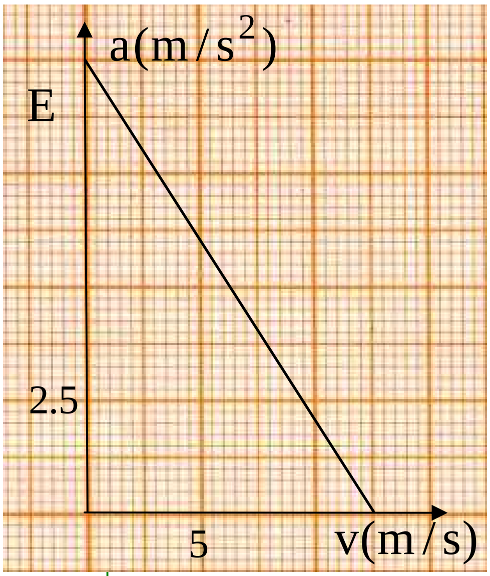
5- أرسم في نفس المعلم و بشكل كيفي المنحنيين $v = f_1(t)$ ، $a = f_2(t)$.

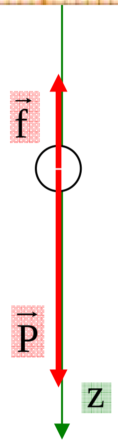
6- تتميز الحركة السابقة بقيمة المقدار $\frac{k}{m}$ ، حدد وحدة هذا المقدار .

7- يمثل البيان الشكل-2- تغيرات (a) تسارع مركز عطالة المظلي بدلالة السرعة (v)

أ- استنتج من البيان قيمتي g و k .

ب- أحسب السرعة الحدية v_ℓ للمظلي .





الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $v(t)$:

- الجملة المدروسة : (مظلي مع تجهيزه)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (oz) :

$$P - f = m\,a$$
$$m.g - kv = m\frac{dv}{dt}$$
$$m\frac{dv}{dt} + k\,v = m\,g$$
$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

2- عبارة v_ℓ بدلالة g ، m ، k :

عند النظام الدائم يكون : $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$0 + \frac{k}{m}v_\ell = g \quad \rightarrow \quad v_\ell = \frac{m.g}{k}$$

3- إثبات حل المعادلة التفاضلية :

- $v = v_\ell\,(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}})$
- $\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{k}(0 - (-\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}})) = g\,e^{-\frac{k}{m}t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$g\,e^{-\frac{k}{m}} + \frac{k}{m}.\frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = g$$
$$g\,e^{-\frac{k}{m}} + g\,(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = g$$
$$g\,e^{-\frac{k}{m}} + g - g\,e^{-\frac{k}{m}t} = g \quad \rightarrow \quad g = g$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

4- عبارة التسارع اللحظية :

لدينا :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

و مما سبق وجدنا :

$$\frac{dv}{dt} = g\,e^{-\frac{k}{m}t} \quad \rightarrow \quad a = g\,e^{-\frac{k}{m}t}$$

5- المنحنيين $v(t)$ ، $a(t)$:

لدينا مما سبق :

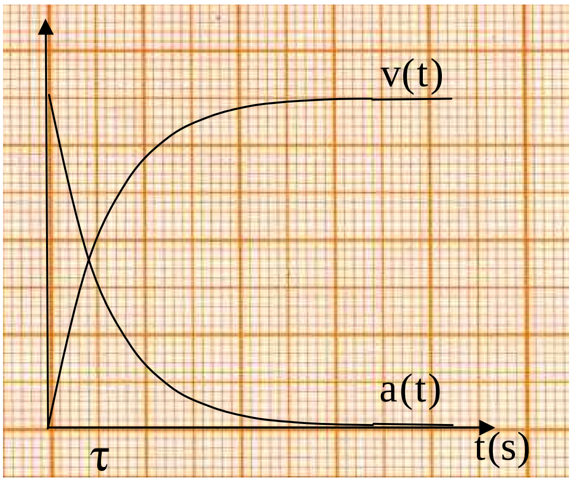
- $v = v_\ell \, (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$
- $a = g \, e^{-\frac{k}{m}t}$

و من هاتين العلاقتين نجد :

$t = 0 \;\rightarrow\; v = 0 \;\rightarrow\; a = g$

$t = \infty \;\rightarrow\; v = v_\ell \;,\; a = 0$

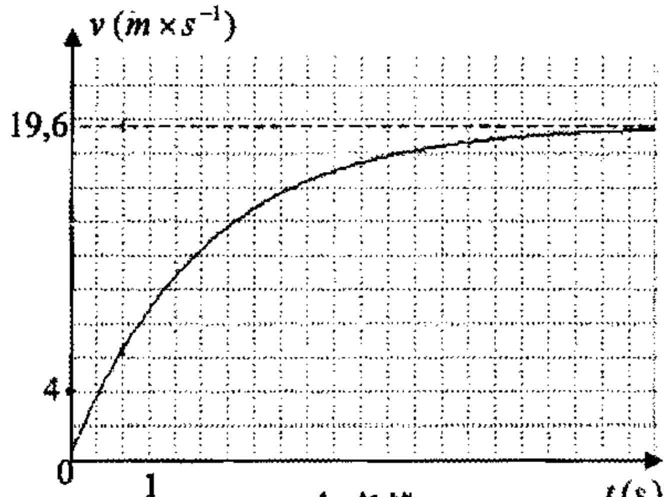
إذن المنحنيين يكونان كما يلي :



تمارين مقترحة

التمرين (5) : (بكالوريا 2010 – علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 09 على الموقع)

قام فوج من التلاميذ في حصة للأعمال المخبرية بدراسة السقوط الشاقولي لجسم صلب (S) في الهواء ، و ذلك باستعمال كاميرا رقمية (Webcam) ، عولج شريط الفيديو ببرمجية "Avistep" بجهاز الإعلام الآلي فتحصلوا على البيان $v = f(t)$ الذي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة (S) بدلالة الزمن (الشكل-4) .



الشكل-4

1- حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) في النظامين الإنتقالي و الدائم . علل .

2- بالاعتماد على البيان عين :

أ/ السرعة الحدية v_{lim} .

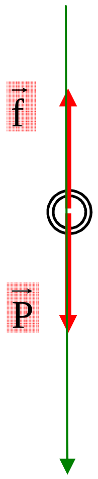
ب/ تسارع الحركة في اللحظة $t = 0$.

3- كيف يكون الجسم الصلب (S) متميزا و هذا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظاميين انتقالي و دائم ؟

4- باعتبار دافعة أرخميدس مهملة ، مثل القوى المؤثرة على الجسم (S) أثناء السقوط ، و استنتج عندئذ المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة السرعة v في حالة السرعات الصغيرة .

5- توقع شكل مخطط السرعة عند إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء . علل .

أجوبة مختصرة :



1) النظام الإنتقالي $(0 < t < 7s)$: في هذه المرحلة (النظام الإنتقالي) البيان $v = f(t)$ عبارة عن خط منحني ، و بما أن السرعة متزايدة تكون طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة متسارعة (من دون انتظام)
النظام الدائم $(t > 7)$: في هذه المرحلة (النظام الدائم) ، البيان $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة إذن طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة .

2- أ) $v_{lim} = 19.6\ m/s$ ، ب) $a = 9.5\ m/s^2$

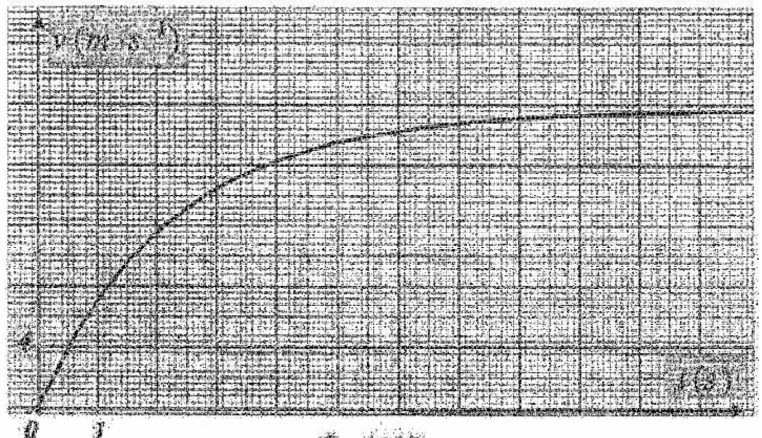
3) - يجب أن يكون الجسم خفيف و ذو حجم كاف لبلوغ السرعة الحدية .

4) تمثيل القوى المؤثرة الجسم (S) :

● المعادلة التفاضلية : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$ ، 5) المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $v = at$.

التمرين (6) : (بكالوريا 2012 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 14 على الموقع)

ندرس في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا حركة سقوط كرية في الهواء .
(الشكل-3) يمثل تطور سرعة مركز عطالة الكرية v بدلالة الزمن t .



الشكل-3

1- من البيان :
أ- حدد المجال الزمني لنظامي الحركة .
ب- عين قيمة السرعة الحدية v_ℓ .
جـ- احسب a_0 تسارع مركز عطالة الكرية في اللحظة $t = 0$. ماذا تستنتج ؟
د- ما هي قيمة التسارع لحظة وصول الكرية إلى سطح الأرض ؟
هـ- كم تكون قيمة الطاقة الحركية للكرية في اللحظة $t = 3\ s$ ؟
2- مثل كيفيا مخطط السرعة $v(t)$ لحركة السقوط الشاقولي لمركز عطالة الكرية في الفراغ .

تعطى : $g = 9.80\ m.s^{-2}$ ، كتلة الكرية : $m = 30\ g$

أجوبة مختصرة :

1- أ) النظام الانتقالي : $0 \le t \le 9\ s$ ، النظام الدائم : $t > 9\ s$ ، ب) $v_\ell = 4.9\ .\ 4 = 19.6\ m/s$
جـ) $a_0 = 9.8\ m/s^2$ ، نلاحظ أن $a_0 = g$ ، نستنتج أن دافعة أرخميدس مهملة .
د) يتضح من البيان أن الكرية بلغت النظام الدائم قبل وصولها إلى الأرض ، و اثناء ذلك تكون السرعة ثابتة $(v = C^{te})$ و عليه التسارع يكون معدوم $(a = \frac{dv}{dt} = 0)$ في النظام الدائم و كذلك لحظة و صول الكرية إلى سطح الأرض ، هـ) $E_C = \frac{1}{2} m\, v^2 = 3.1\, J$.

2) الفراغ يقصد به عدم وجود الهواء و بالتالي عدم وجود تأثيرات الهواء المتمثلة في قوى الاحتكاك و دافعة أرخميس ، في حالة الكرية تخضع إلى قوة وحيدة ثابتة تتمثل في قوة الثقل ، و حركتها أثناء ذلك تكون مستقيمة متسارعة بانتظام بدون سرعة ابتدائية (سقوط حر) ، يكون المخطط $v(t)$ إذن عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $v = at$.

التمرين (7) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 47 على الموقع)

عند اللحظة $t = 0$ نترك كرة تنس كتلتها $m = 57\ g$ لتسقط في الهواء ، ندرس حركة مركز العطالة للكرة في المرجع السطحي الأرضي المزود بالمعلم المستقيم $(O, \vec{k})$ حيث $\vec{k}$ شاقولي و موجه نحو الأسفل .

تظهر نتائج الدراسة أن سرعة مركز عطالة الكرة تحقق المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dv}{dt} = A - B.v^2$$

حيث : $A = 9.8\ m/s^2$ ، $B = 0.02\ m$.

تخضع الكرة أثناء سقوطها لقوة احتكاك ، شدتها تعطى بالعلاقة : $\|\vec{f}\| = k.v^2$.

1- ما هي القيمة الابتدائية لشدة هذه القوة ؟ كيف تتغير شدة القوة مع الزمن أثناء السقوط ؟

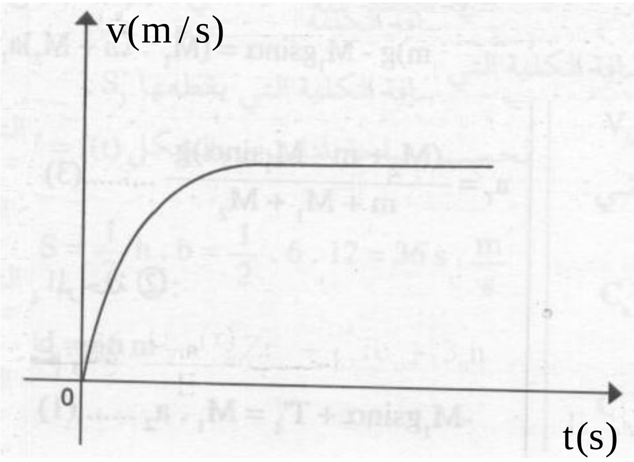
2- ما هي القوى الخارجية الأخرى المطبقة على الكرة ؟ هل تتغير شدة هذه القوى أثناء السقوط ؟

3- باستعمال المعادلة التفاضلية أوجد قيمة تسارع مركز عطالة الكرة عند اللحظة $t = 0$.

4- أكتب عند $t = 0$ قانون نيوتن الثاني و استنتج أنه يمكن اهمال إحدى القوى الخارجية المطبقة على الكرة أثناء دراسة حركتها .

5- باستعمال المعادلة التفاضلية ، أوجد قيمة السرعة الحدية v_ℓ .

6- إن المنحنى البياني الذي يمثل تغيرات السرعة v بدلالة الزمن له الشكل التالي :



أ- مثل المماس عند اللحظة $t = 0$ ، و كذا المستقيم المقارب للمنحنى عند $t \to \infty$ ، أكتب معادلة هذا الأخير .

ب- هي قيمة معامل توجيه هذا المستقيم ؟

ب- كيف نسمي اللحظة الموافقة لفاصلة نقطة تقاطع مماس المنحى $v(t)$ عند $t = 0$ و المستقيم المقارب لنفس المنحنى عند $t = \infty$ ، أوجد قيمة هذه اللحظة .

يعطى : $g = 9.8\ m/s^2$.

أجوبة مختصرة :

1) $f = 0$ ، 2) الثقل $\vec{P}$ حيث : $P = m.g$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ حيث : $\Pi = \rho_{air}.V.g$ ،

هاتين القوتين ($\vec{P}$ ، $\vec{\Pi}$) ثابتتين في الشدة كون : m ، g ، ρ_{air} .

3) $a_0 = 9.8\ m/s^2$.

4) $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}_{(t=0)}$ ، بتحليل العلاقة الشعاعية : $P - \Pi = m.a_{(t=0)} \leftarrow g - \frac{\Pi}{m} = a_{(t=0)}$ ، و حيث أن $g = 9.8$ يكون بالتعويض : $\Pi = 0$.

سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

عرض نظري و تمارين

05

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية

رياضيات ، تقني رياضي

****

السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 05

السقوط الحر و القذائف

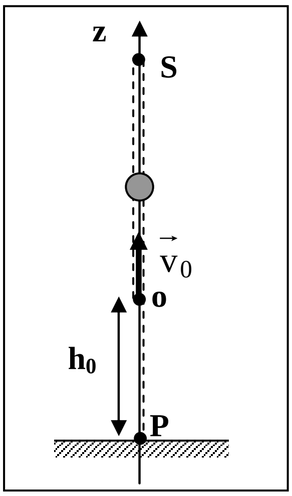
السقوط الحر للأجسام في الهواء

• تعريف السقوط الحر :

نقول عن جسم أنه في سقوط حر ، عندما يتحرك تحت تأثير ثقله فقط ، أي بإهمال تأثيرات الهواء عليه المتمثلة في قوة الاحتكاك و دافعة أرخميدس .

التمرين (1) :

تقذف كرة (S) شاقوليا عند اللحظة $t = 0$ من نقطة (O) نعتبرها مبدأ الفواصل ، تقع على ارتفاع $h_0 = 5$ m من سطح الأرض بسرعة إبتدائية $v_0 = 10$ m/s (الشكل-1) .



1- أدرس طبيعة حركة الكرة .

2- أكتب المعادلات الزمنية للحركة $v_z(t)$ ، $z(t)$ ، مثل مخططات الحركة بشكل كيفي .

3- أوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة الأرض .

4- أوجد لحظة اصطدام الكرة بالأرض ، ثم استنتج سرعتها عندئذ .

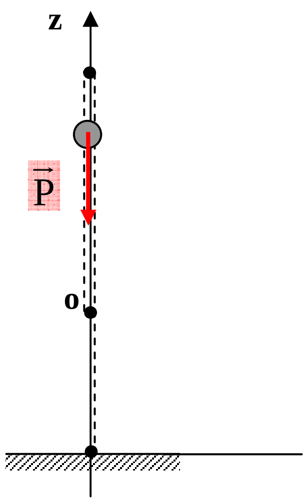
يؤخذ : $g = 10$ m/s^2 .

الأجوبة :

1- دراسة طبيعة الحركة :

- الجملة المعتبرة : جسم صلب .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا خلال مدة السقوط .



- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : ثقل الجسم الصلب $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$
$$\vec{P} = m\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور oz :

$$- P = m\, a_z$$
$$- m.g = m\, a_z \quad \rightarrow \quad a_z = - g$$

كون أن g ثابت يكون تسارع الجسم (S) ثابت ، و بما أن مساره مستقيم ، فالحركة إذن مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- المعادلات الزمنية للحركة $v_y(t)$ ، $y(t)$ ، كذا معادلة المسار $y(x)$ ، مخططات الحركة :

لدينا :

$$a_z = - g$$

تكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$v_z = - g\, t + C$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \;\rightarrow\; v_z = v_0$$

بالتعويض :

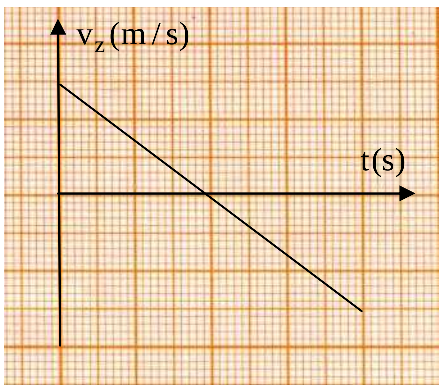
$$v_0 = - g(0) + C \;\rightarrow\; C = v_0$$

و منه تصبح معادلة السرعة :

$$\boxed{v_z = - g\, t + v_0}$$
$$\boxed{v_z = a_z\, t + v_0}$$

حيث a_z هو تسارع الحركة .

- بيانيا :



- تكامل طرفي $v_z(t)$ بالنسبة للزمن فنجد :

$$z = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 t + C'$$

من الشروط الابتدائية :

$t = 0 \rightarrow z = 0$

بالتعويض :

$$0 = -\frac{1}{2} g\,(0)^2 + v_0(0) + C' \quad \rightarrow \quad C' = 0$$

يصبح :

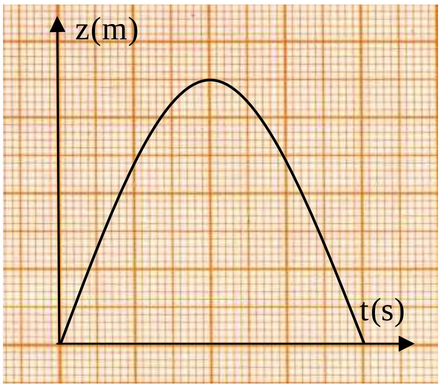
$$\boxed{z = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 t}$$

أو :

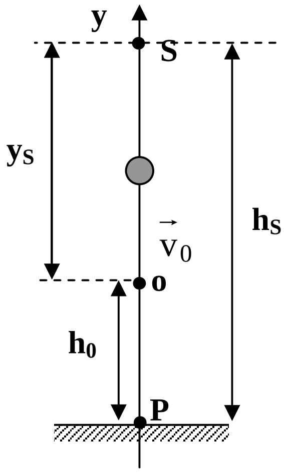
$$\boxed{z = \frac{1}{2} a_z\, t^2 + v_0 t}$$

حيث a_z هو تسارع الحركة .

- بيانيا :



3- أقصى ارتفاع تبلغ الكرة :



$h_S = h_0 + y_S$

تبلغ الكرة أقصى ارتفاع في الموضع (S) لذا يكون : $v_{yS} = 0$ ، بالتعويض في $v_y(t)$:

$v_{yS} = -\,g.t_S + v_0$

$0 = -\,10\, t_S + 10$

$10\, t_S = 10 \rightarrow t_S = 1\text{ s}$

بالتعويض في $y(t)$ نجد :

$$y_S = -\frac{1}{2} g t_S^{2} + v_0 t_S$$

$$y_S = (0.5 \,.\, 10 \,.\, (1)^2) + (10 \,.\, 1) = 5\text{ m}$$

إذن :

$$h_S = 5 + 5 = 10\text{ m}$$

ملاحظة :

يمكن الحصول على نفس النتيجة بتطبيق مبدا انحفاظ الطاقة .

4- لحظة اصطدام الكرة بالأرض عند P :

لدينا $y_P = -h_0 = -5\text{ m}$ ، بالتعويض في $y(t)$:

$$y_P = -\frac{1}{2} g t_P^{2} + v_0 t_P$$

$$-5 = -0.5 \,.\, 10\, t_P^{2} - 10 t_P$$

$$5 t_P^{2} - 10 t_P - 5 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - (4 \,.\, 5\, (-5)) = 200 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 200$$

- $t_{P1} = \dfrac{10 - 10\sqrt{2}}{10} = 1 - \sqrt{2} = 0.41\text{s}$ (مرفوض)
- $t_{P1} = \dfrac{10 + 10\sqrt{2}}{10} = 1 + \sqrt{2} = 2.41\text{s}$

- سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض عند P :

لدينا $t_P = 2.41\text{ s}$ بالتعويض $v_y(t)$:

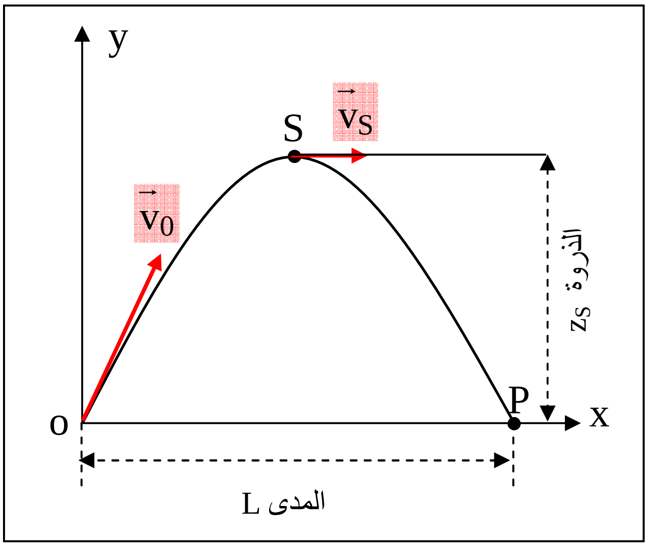
$$v_{yP} = -10 t_P + 10$$

$$v_{yP} = -10\,(2.4) + 10 = -14.1\text{ m/s}$$

حركة قذيفة

• الذروة و المدى :

- من موضع (o) نعتبره مبدأ الاحداثيات في معلم مستوي $(O , \vec{i} , \vec{j})$ ، نقذف جسم صلب (S) في اللحظة $t = 0$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ ، يصنع شعاعها الزاوية α مع المحور ox (الشكل) . نعتبر قوى الاحتكاك و دافعة أرخميدس مهملة .



- الذروة هي أعظم ارتفاع يبلغه الجسم الصلب (الموضع S). و الذي يكون عنده شعاع السرعة أفقيا ، إذن عند بلوغ الذروة يتحقق :

$$\boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = 0}$$

- المدى L هو المسافة بين نقطة القذف O و نقطة التصادم P على المستوي الأفقي الذي يضم O ، أي :

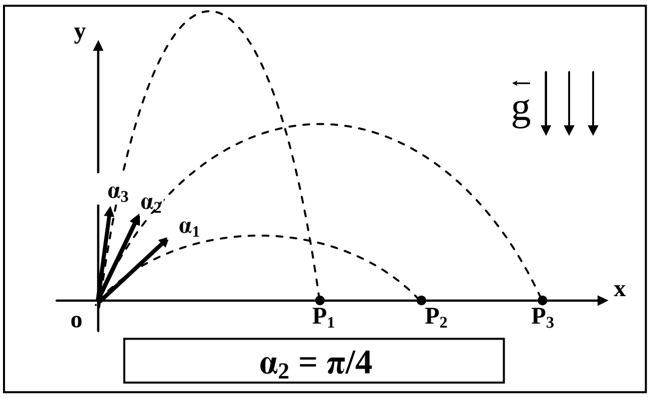
$$\boxed{L = x_P}$$

و إذا كان مبدأ الاحداثيات منطبق على موضع القذف كما في الشكل السابق ، فإن عند بلوغ المدى يتحقق :

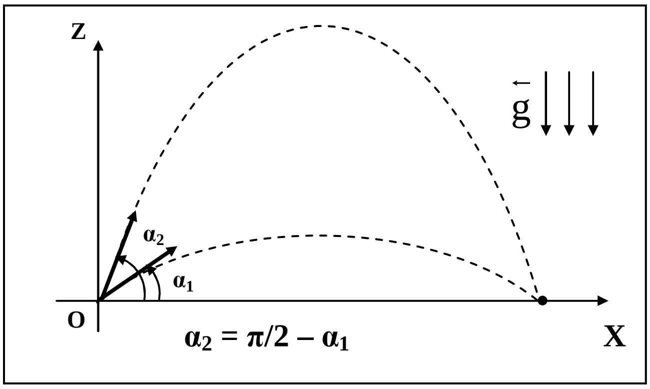
$$\boxed{y_P = 0}$$

ملاحظة- 1 :

- من أجل قيمة محددة للسرعة الإبتدائية v_0 ، يكون المدى أعظميا لما $\sin(2\alpha) = 1$ أي $\alpha = 45°$ كما مبين في الشكل التالي :



- نحصل على نفس المدى من أجل الزاويتين α ، $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ كما مبين في الشكل التالي :

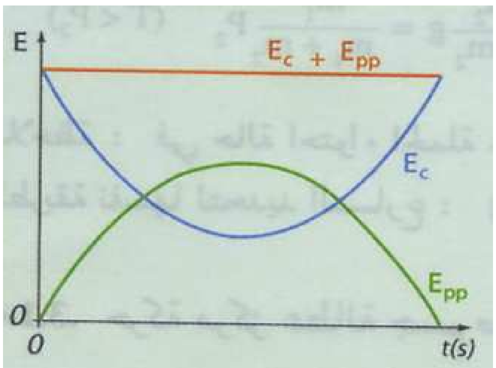


• طاقة الجملة (قذيفة + أرض) :

- طاقة الجملة (قذيفة + أرض) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي تتضمن طاقة حركية $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ و طاقة كامنة ثقالية $E_{PP} = mgz$ ، ففي حقل منتظم للجاذبية g يعبر عن طاقة الجملة (قذيفة + أرض) بالعلاقة :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz}$$

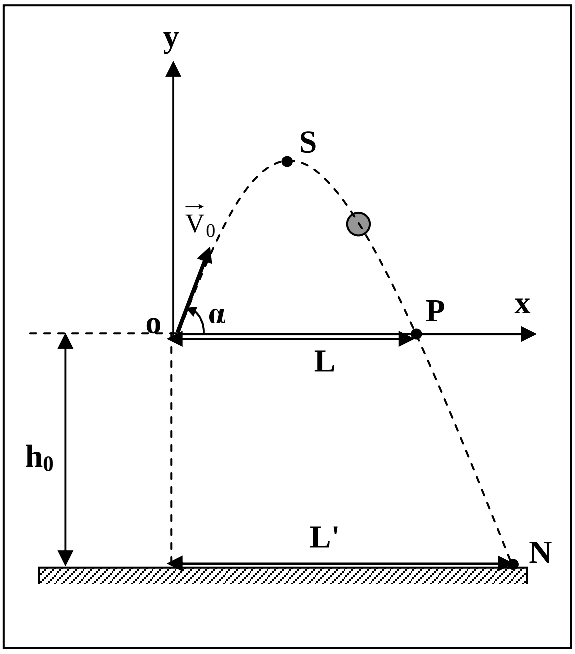
- الدراسة التجريبية لتطور كل من الطاقة الحركية E_C و الطاقة الكامنة E_P و كذا الطاقة الكلية $E = E_C + E_P$ للجملة (قذيفة + أرض) في الحالة التي تكون فيها قوى الإحتكاك مهملة أعطت البيانات الموضحة في الشكل التالي :



التمرين (2) :

من نقطة o تقع على ارتفاع $h_0 = 5\ m$ من سطح الأرض نقذف عند اللحظة $t = 0$ كرة (S) كتلتها m بسرعة ابتدائية $v_0 = 20\ m.s^{-1}$ يصنع شعاعها الزاوية $\alpha = 60°$ ، تهمل كل قوى الاحتكاك و كذا دافعة أرخميدس ، نعتبر مبدأ الأزمنة و الفواصل عند النقطة o .

يعطى : $g = 10\ m/s^2$.



1- أدرس طبيعة حركة الكرة .

2- أكتب المعادلات الزمنية للحركة ، مثل مخططات الحركة بشكل كيفي .

3- أكتب معادلة المسار و بين طبيعته .

4- أوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض .

5- أوجد مدى الكرة L و كذا الزمن اللازم لذلك .

6- تأكد من أن زمن بلوغ المدى هو ضعف زمن بلوغ الذروة .

7- أحسب المسافة الأفقية L' بين موضع سقوط الكرة على الأرض و المحور oy .

8- أحسب سرعة الكرة عند المواضع S ، P ، N ، و كذا الزاوية التي شعاع كل سرعة مع المحور ox ، مثل كل هذه الأشعة على الشكل .

يعطى : $\cos 60° = 0.5$ ، $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan 60° = \sqrt{3}$

الأجوبة :

1- طبيعة الحركة :

- الجملة المدروسة : كرة.
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ P_y = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

إذن :
- مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .
- مسقط حركة الكرة على المحور oy هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- المعادلات الزمنية :

لدينا سابقا :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

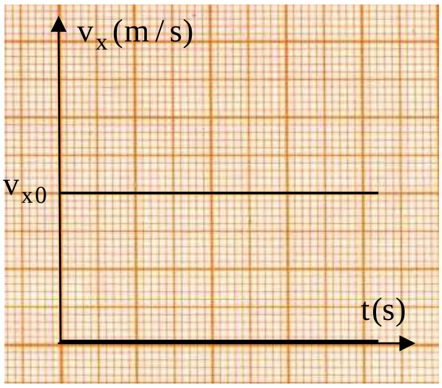
بالتعويض :

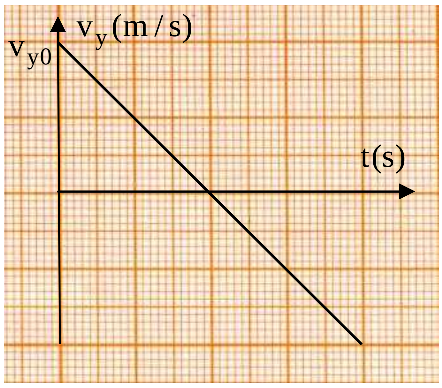
$$\begin{cases} v_0 \cos\alpha = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha = -g\,(0) + C_2 \rightarrow C_2 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

- بيانيا :





<u>تطبيق عددي :</u>

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = 10 \\ v_y = -10\,t + 10\sqrt{3} \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t + C_1' \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

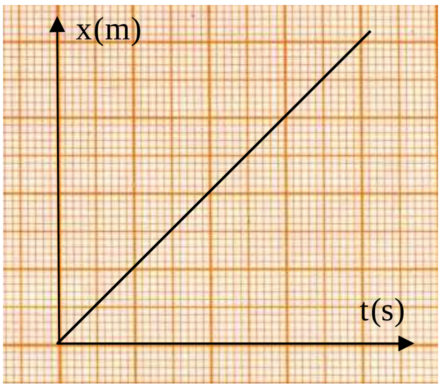
بالتعويض :

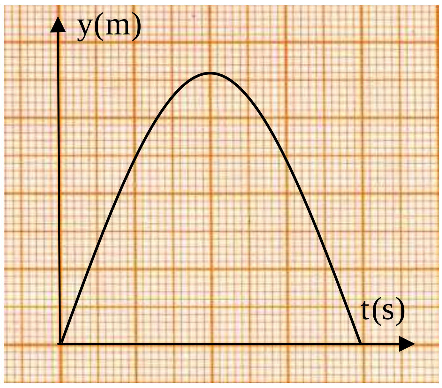
$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos\alpha\,(0) + C_1' \rightarrow C_1 = 0 \\ 0 = -\dfrac{1}{2} g\,(0)^2 + v_0 \sin\alpha(0) + C_2' \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

- بيانيا :





تطبيق عددي :

$$\vec{r}\begin{cases} x = 10\,t \\ y = -5\,t^2 + 10\sqrt{3}\,t \end{cases}$$

3- معادلة المسار و طبيعته :

من المعادلة $x = f(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

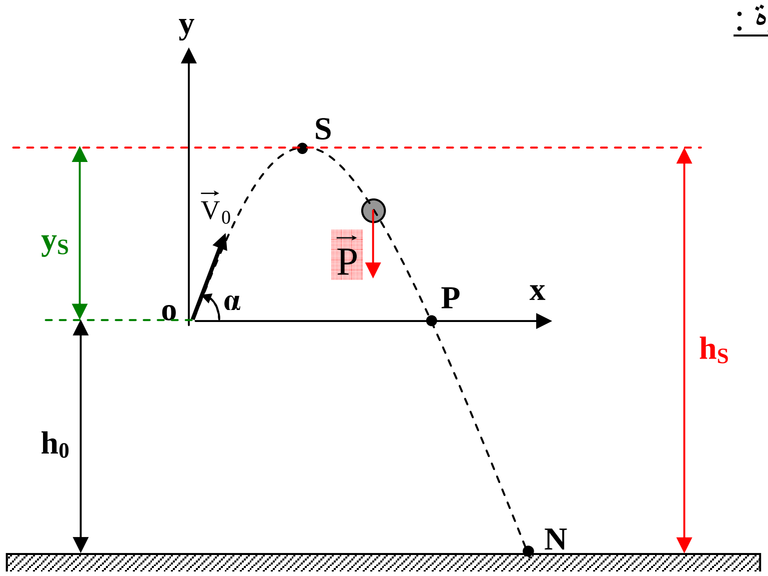
$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x$$

تطبيق عددي :

$$y = -0.05\,x^2 + \sqrt{3}\,x$$

و هي معادلة قطع مكافئ . إذن مسار الكرة عبارة عن قطع مكافئ .

4- أقصى ارتفاع تبلغه الكرة :



$$h_S = y_S + h_0 \quad .... (1)$$

عند (S) أي عند الذروة يكون $v_{yS} = 0$.

بالتعويض في العبارة $v_y(t)$ نجد :

$$0 = -10\,t_S + 10\sqrt{3}$$

$$10\,t_S = 10\sqrt{3} \rightarrow t_S = \sqrt{3}\ s$$

بالتعويض في عبارة $y(t)$:

$$y_S = -5\,(\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{3}\,(\sqrt{3})) = 15\ m$$

ومن العلاقة (1) يصبح :

$h_S = 15 + 5 = 20 \text{ m}$

و هو أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض .

5- مدى الكرى :

$L = x_P$

عند بلوغ المدى (P) يكون : $y_P = 0$ ، بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$$0 = - 0.05\, x_P^2 + \sqrt{3}\, x_P$$
$$0.05\, x_P^2 = \sqrt{3}\, x_P$$
$$0.05\, x_P = \sqrt{3} \quad \rightarrow x_P = \frac{\sqrt{3}}{0.05} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

- الزمن اللازم لبلوغ المدى :

لدينا : $x_P = 20\sqrt{3}$ بالتعويض في العبارة x(t) يكون :

$$20\sqrt{3} = 10\, t_P \rightarrow t_P = 2\sqrt{3}$$

6- التأكد من أن: زمن بلوغ المدى هو ضعف زمن بلوغ الذروة .:

لدينا سابقا :

- $t_P = 2\sqrt{3} \quad , \quad t_S = \sqrt{3}$

إذن: $t_P = 2\, t_S$.

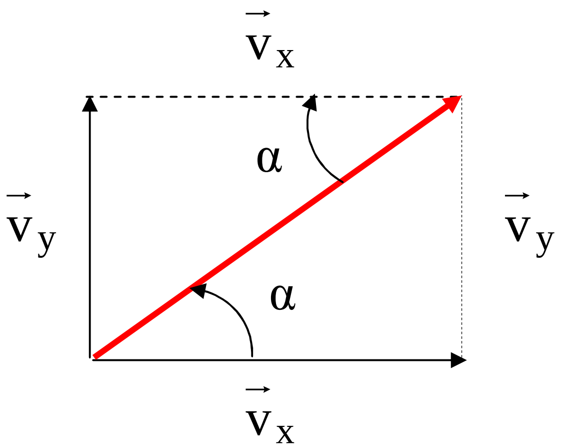
7- المسافة الأفقية بين موضع سقوط الكرة على الأرض (N) و المحور (oy) :

لدينا : $y_N = - h_0 = - 5$ بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$$- 5 = - 0.05\, x_N^2 + \sqrt{3}\, x_N$$
$$0.05\, x_n^2 - \sqrt{3}\, x_N - 5 = 0$$
$$\Delta = 4 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$$
$$x_{N1} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2 . 0.05} = - 2.67 \text{ m} \quad (\text{مرفوض})$$
$$x_{N2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2 . 0.05} = 37.32 \text{ m} \quad (\text{مقبول})$$

إذن المسافة الأفقية بين موضع سقوط الكرة على الأرض (N) و المحور (oy) هي 37.32 m .

8- سرعة الكرة عند المواضع S ، P ،N و كذا الزاوية التي يصنعها شعاع السرعة مع المحور ox :



- $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- $\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x}$ (من الشكل)

عند الموضع (S) :

لدينا : $t_S = \sqrt{3}\,s$ بالتعويض في $\vec{v}$:

$$\vec{v}_S \begin{cases} v_{xS} = 10\ m/s \\ v_{yS} = -10(\sqrt{3}) + 10\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$v_S = \|\vec{v}_S\| = \sqrt{(10)^2 + (0)^2} = 10\ m/s$$

- $\tan(\alpha_S) = \dfrac{v_{yS}}{v_{xS}} = \dfrac{0}{10} = 0 \ \rightarrow\ \alpha_S = 0$

عند الموضع (P) :

لدينا : $t_S = 2\sqrt{3}\,s$ بالتعويض في $\vec{v}$:

$$\vec{v}_P \begin{cases} v_{xP} = 10\ m/s \\ v_{yP} = -10(2\sqrt{3}) + 10\sqrt{3} = -10\sqrt{3}\ m/s \end{cases}$$

$$v_P = \|\vec{v}_P\| = \sqrt{(10)^2 + (-10\sqrt{3})^2} = 20\ m/s$$

- $\tan(\alpha_P) = \dfrac{v_{yP}}{v_{xP}} = \dfrac{-10\sqrt{3}}{10} = -\sqrt{3} \ \rightarrow\ \alpha_S = -60°$

عند الموضع (N) :

نحسب أولا الزمن اللازم لبلوغ الموضع (N) .

- لدينا $x_N = 37.32\ m$ بالتعويض في $x(t)$:

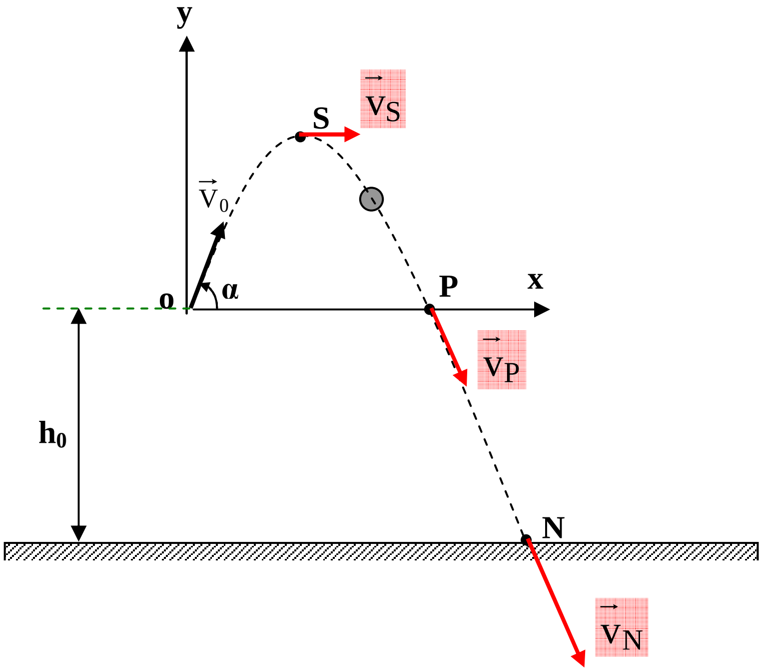
$$37.32 = 10\ t_N \ \rightarrow\ t_N = 3.73\ s$$

بالتعويض في $\vec{v}$:

$$\vec{v}_N \begin{cases} v_{xN} = 10\ m/s \\ v_{yN} = -10(3.73) + 10\sqrt{3} \approx -20\ m/s \end{cases}$$

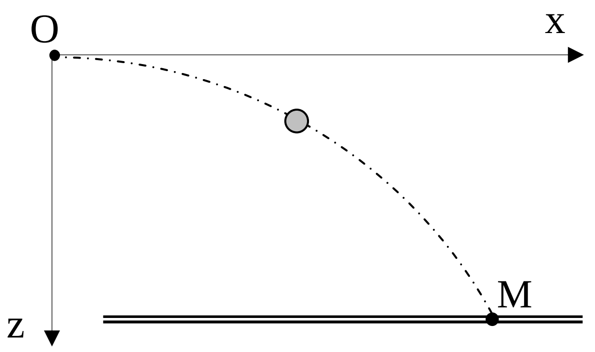
$$v_N = \|\vec{v}_N\| = \sqrt{(10)^2 + (-20)^2} = 22.36\ m/s$$

- $\tan(\alpha_N) = \dfrac{v_{yN}}{v_{xN}} = \dfrac{-20}{10} = -2 \ \rightarrow\ \alpha_N = -63.43°$

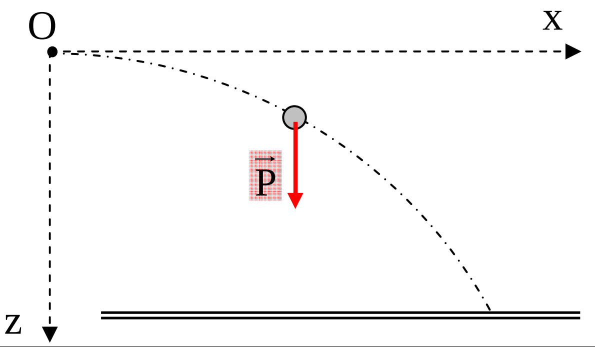


التمرين (3) :

من نقطة o نعتبرها مبدأ الإحداثيات تقع على ارتفاع $h = 405\ m$ من سطح الأرض ، نقذف افقيا عند اللحظة $t = 0$ جسم صلب (S) مركز عطالته G ، فيسقط باتجاه النقطة M من سطح الأرض (الشكل) ، نهمل تأثيرات الهواء على الجسم (S) و نعتبر $g = 9.8\ m/s$.



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أجد :
أ- المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $z(t)$.
ب- معادلة المسار $z(x)$.
2- أوجد إحداثيتي نقطة السقوط M .
3- أوجد الزمن اللازم لوصول الصندوق إلى الأرض .



الأجوبة :

1- أ- المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ ، $y(t)$:
- الجملة المدروسة : جسم صلب (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ P_z = m\,a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ P = m\,a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ m\,g = m\,a_z \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = g \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \\ 0 = g\,(0) + C_2 \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_z = g\,t \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0\,t + C_1' \\ z = \frac{1}{2} g\,t^2 + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0\,(0) + C_1' \rightarrow C'_1 = 0 \\ 0 = \frac{1}{2} g\,(0)^2 + C_2' \rightarrow C'_2 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0\, t \\ z = \dfrac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

ب- معادلة المسار :

من المعادلة $x = f(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

بالتعويض في $z(t)$:

$$z = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

$$z = \frac{g}{2{v_0}^2} x^2$$

جـ- إحداثيي نقطة السقوط M :

لدينا :

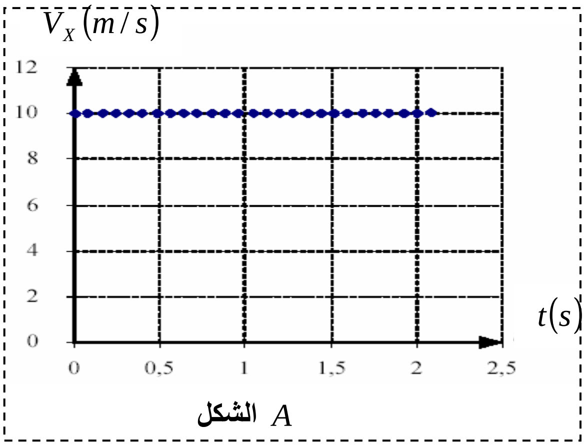
$$x = x_M \rightarrow z = h = 405$$

1

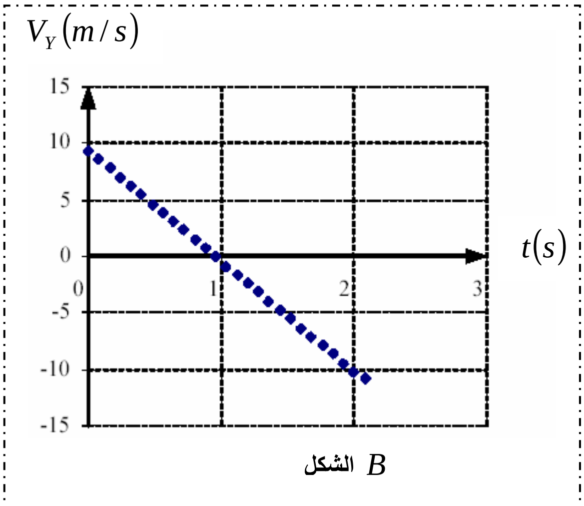
التمرين (4) :

في لعبة رمي الجلة ، و عند اللحظة $t = 0$ رمى اللاعب الجلة بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ يصنع الزاوية α مع المحور الأفقي من على ارتفاع $h_0 = 2.5$ m من سطح الأرض . تهمل دافعة أرخميدس و قوى الاحتكاك .

الدراسة التجريبية لحركة هذه الجلة أعطت البيانين التاليين أين تمت الدراسة في معلم (O ,x ,y) مبدأه موضع رمي الجلة و باعتبار مبدأ الأزمنة عند مبدأ الإحداثيات (موضع رمي الجلة) .



الشكل A



الشكل B

1- أدرس طبيعة الحركة و أكتب معادلة مسار الجلة .

2- اعتمادا على الدراسة النظرية و البيانين (A) ، (B) أوجد :

- السرعة الابتدائية v_0 .
- زاوية الرمي α ($0 < α < 90°$) .

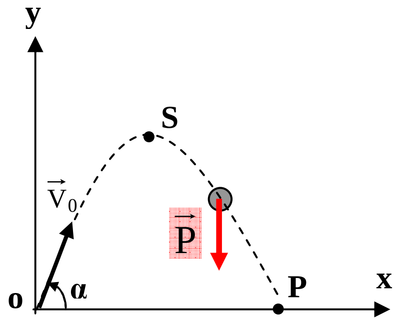
- لحظة بلوغ الذروة (S) .
- الجاذبية الأرضية g .
- أقصى ارتفاع بلغته الجلة بالنسبة لسطح الأرض .
- سرعة الجلة عند بلوغها الذروة (أقصى ارتفاع) .
- مدى الجلة .
- سرعة الجلة عند بلوغها المدى .

<u>يعطى :</u> $\tan 45° = 1$ ، $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>الأجوبة :</u>

<u>1- معادلة المسار :</u>- الجملة المدروسة : الجلة .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_x \\ P_y = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_y \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \;\rightarrow\; \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 \cos\alpha = C_1 \;\rightarrow\; C_1 = v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha = -g\,(0) + C_2 \;\rightarrow\; C_2 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

نكامل طرفين عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t + C_1' \\ y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos\alpha\,(0) + C_1' \rightarrow C_1 = 0 \\ 0 = -\frac{1}{2} g\,(0)^2 + v_0 \sin\alpha(0) + C_2' \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

من المعادلة $x = f(t)$ $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$y = \frac{-g}{2{v_0}^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x$$

و هي معادلة قطع مكافئ . إذن مسار الكرة عبارة عن قطع مكافئ .

2- أ- السرعة الابتدائية v_0 :

من البيان :

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} = 10 \text{ m/s} \\ v_y = v_{0y} = 10 \text{ m/s} \end{cases}$$

ومنه :

$$v_0 = \left\| \overrightarrow{v_0} \right\| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

● زاوية الرمي :

من البيان : $t = 0 \rightarrow y = 10$ m بالتعويض في المعادلة $v_y(t)$ نجد :

$$v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha$$

$$10 = -g(0) + 10\sqrt{2} \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45°$$

● لحظة بلوغ الذروة :

- عند بلوغ الذروة يكون $v_{ys} = 0$.

- من البيان $v_y(t)$ تنعدم v_y من أجل $t_S = 1$ و هي لحظة بلوغ الذروة .

● الجاذبية الأرضية :

لدينا :

$$t = t_S = 1\ s \rightarrow v_y = v_{yS} = 0$$

بالتعويض في $v_y(t)$ نجد :

$$v_{yS} = -g\ t_S + v_0 \sin\alpha$$

$$0 = -g\,(1) + 10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow g = 10\ m/s^2$$

● أقصى ارتفاع تبلغ الجلة بالنسبة للأرض :

إذا كان h_S هو أقصى ارتفاع تبلغه الجلة بالنسبة للأرض يكون :

$$h_S = h_0 + y_S$$

نحسب y_S .

لدينا : $t_S = 1\ s$ بالتعويض في $y(t)$ نجد :

$$y_S = -\frac{1}{2}\,g\,t_S^2 + v_0 \sin\alpha\ t_S$$

$$y_S = -0.5 \,.\, 10\,(1)^2 + 10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\ m \rightarrow h_S = 2.5 + 5 = 7.5\ m$$

● سرعة الجلة عند بلوغها أقصى ارتفاع :

$$\vec{v}_S \begin{cases} v_{xS} = v_0\cos\alpha = 10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \\ v_{yS} = 0 \end{cases}$$

$$v_S = \left\|\vec{v_S}\right\| = \sqrt{(10)^2 + (0)^2} = 10\ m/s$$

● مدى الجلة :

- إذا كان L هو مدى الجلة يكون : $L = x_P$.

- عند بلوغ المدى يكون : $y_P = 0$ بالتعويض في $y(t)$.

$$y_P = -\frac{1}{2}\,g\,t_P^2 + v_0 \sin\alpha\ t_P$$

$$0 = -0.5 \,.\, 10\,t_P^2 + 10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,t_P$$

$$5t_P^2 = 10\,t_P \rightarrow 5t_P = 10 \rightarrow t_P = 10\ s$$

بالتعويض في $x(t)$ نجد :

$$x_P = v_0 \sin\alpha\ t_P$$

$$x_P = 10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, 2 = 20\ m$$

إذن المدى هو : $L = x_P = 20\ m$.

● <u>سرعة الكرية عند بلوغ المدى :</u>

لحظة بلوغ المدى هي $t_P = 2\ s$ بالاسقاط في البيانين $v_x(t)$ ، $v_y(t)$ نجد :

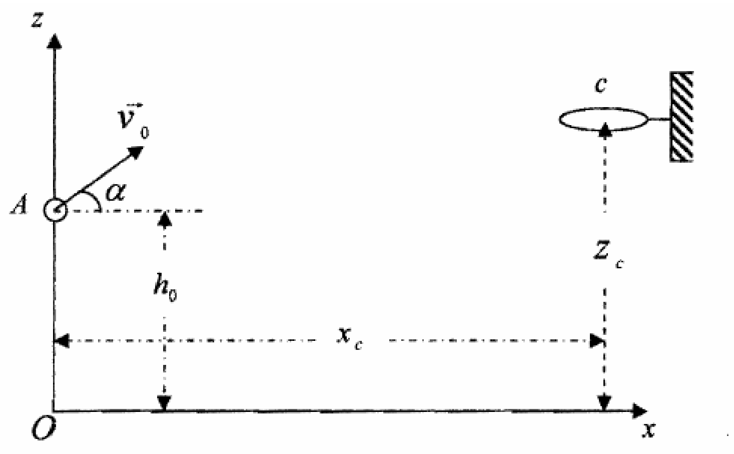
$$t_P = 2\ s \ \rightarrow \ \begin{cases} v_x = v_{0P} = 10\ m/s \\ v_y = v_{0P} = -10\ m/s \end{cases}$$

$$v_P = \left\| \overrightarrow{v_P} \right\| = \sqrt{(10)^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2}\ m/s$$

تمارين مقترحة

التمرين (5) : (بكالوريا 2009 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 08 على الموقع)

قام لاعب في مقابلة لكرة السلة ، بتسديد الكرة نحو السلة من نقطة A منطبقة على مركز الكرة الموجود على ارتفاع $h_0 = 2.10\ m$ من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $(V_0 = 8\ m.s^{-1})$ يصنع حاملها زاوية $\alpha = 37°$ مع الأفق ، ليمر مركز الكرة G بمركز السلة الذي إحداثياه : $(x_c = 4.50\ m\ ,\ z_c)$ في المعلم الأرضي $(\vec{ox},\vec{oz})$ الذي نعتبره غاليليا



1/ أدرس حركة مركز عطالة الكرة في المعلم $(\vec{ox},\vec{oz})$ معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة تسديد الكرة و إهمال تأثير الهواء .

2/ أحسب (z_c) .

3/ يعبر مركز عطالة الكرة مركز السلة بسرعة $(\vec{v}_c)$ ، التي يصنع حاملها مع الأفق زاوية (β) . استنتج قيمتي كل من (v_c) و (β) .

تعطى : $(g = 9.80\ m.s^{-2})$.

أجوبة مختصرة :

1) ▪ مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .
▪ مسقط حركة الكرة على المحور oz هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

$v_x = v_0 \cos\alpha$ ، $v_z = -g\,t + v_0 \sin\alpha$ ، $x = v_0 \cos\alpha\, t$ ، $z = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h_0$ ،

$z = -\dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x + h_0$.

2) $z_C = 3\,m$

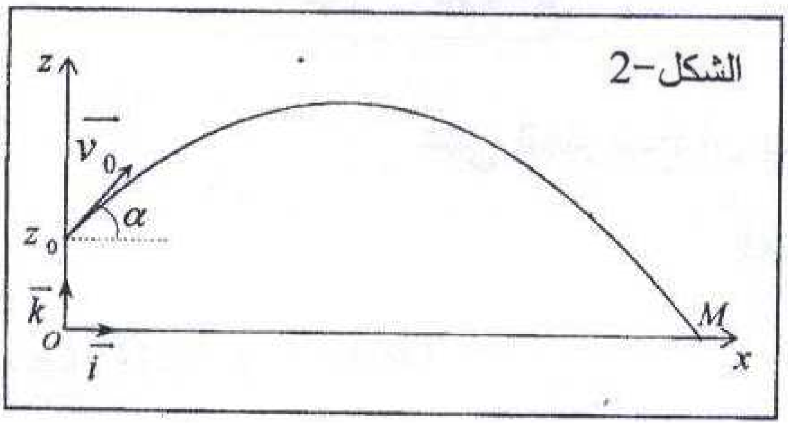
3) نبحث عن لحظة بلوغ النقطة C من طرف الكرة و لتكن t_C ، فنجد : $t_C = 0.70\,s$ و منه :

$v_C = 6.7\ m/s$ ، $\tan\alpha = \dfrac{|v_{Cz}|}{v_{Vx}} = \dfrac{2.04}{6.40} = 0.32 \leftarrow \beta = 18°$.

التمرين (6) : (بكالوريا 2011 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 13 على الموقع)

في لعبة رمي الجلة ، يقذف اللاعب في اللحظة $t = 0\ s$ الجلة من ارتفاع $oz_0 = h = 2.0\ m$ ، عن سطح الأرض ، بسرعة ابتدائية $v_0 = 13.7\ m.s^{-1}$ ، شعاعها يصنع زاوية $\alpha = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{v_0}) = 35°$.

نهمل تأثير الهواء (مقاومة الهواء و دافعة أرخميدس) ، و نأخذ $g = 9.80\ m.s^{-1}$.



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المعلم المبين على (الشكل-2) ، استخرج :

أ- المعادلة التفاضلية للحركة .

ب- المعادلات الزمنية للحركة .

2- اكتب معادلة المسار $z = f(x)$.

3- اوجد إحداثيات M نقطة سقوط القذيفة . و ما هي سرعتها عندئذ ؟

أجوبة مختصرة :

1- أ) $\frac{dv_x}{dt} = 0$ ، $\frac{dv_z}{dt} = -g$ ، $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ ، $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$

ب) $v_x = v_0\cos\alpha$ ، $v_z = -g\,t + v_0\sin\alpha$ ، $x = v_0\cos\alpha\, t$ ، $z = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\sin\alpha\, t + h_0$

2) $z = -\frac{g}{2{v_0}^2\cos\alpha^2}x^2 + \tan\alpha\, x + h_0$

3) $(x_M = 20\ m\ ,\ z_M = 0)$ ، $v_M = 15\ m/s$

سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

عرض نظري و تمارين

05

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

****

www.sites.google.com/site/faresfergani

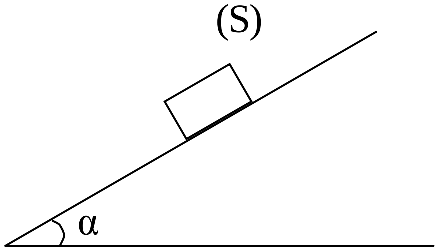
السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 06

حركة مركز عطالة جسم على مستوي

التمرين (1):

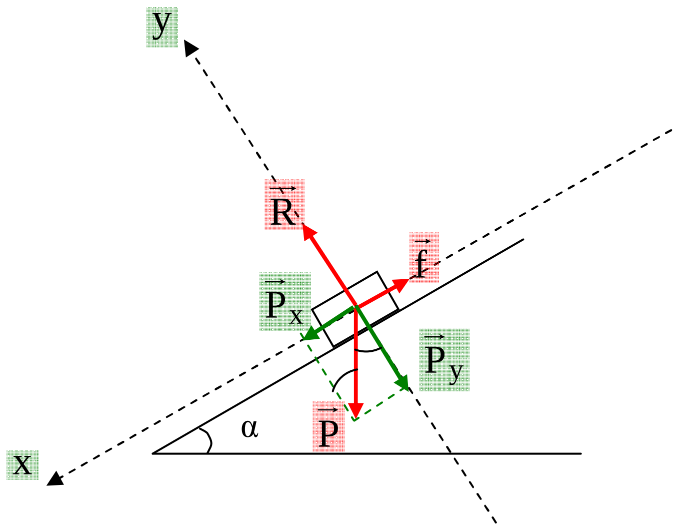
على مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية α ، نترك (بدون سرعة ابتدائية) عند اللحظة $t = 0$ جسم صلب (S) كتلته m من موضع نعتبره مبدأ الاحداثيات ، نفرض أن قوى الإحتكاك تكافئ قوة ثابتة $\vec{f}$ توازي المستوي و تعاكس جهة حركة الجسم (S) .



1- أدرس طبيعة الحركة في وجود الاحتكاك .
2- في غياب الاحتكاك ، أكتب المعادلات الزمنية للحركة ، مثل مخططات الحركة بشكل كيفي .
3- عبر عن قوة رد فعل المستوي المائل على الجسم (S) بدلالة m ، g ، α .

الأجوبة :

1 - دراسة طبيعة الحركة :



- الجملة المعتبرة : الجسم A .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x + R_x + f_x = m_1\, a_x \\ P_y + R_y + f_y = m_1\, a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\sin\alpha + 0 - f = m\,a \\ -P\cos\alpha + R + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\,g\sin\alpha - f = m\,a \quad \text{........ (1)} \\ -m\,g\cos\alpha + R = 0 \quad \text{........ (2)} \end{cases}$$

من العلاقة (1) يكون :

$$a = \frac{m\,g\sin\alpha - f}{m}$$

$$\boxed{a = g\sin\alpha - \frac{f}{m}}$$

f ، m ، α ، g ثوابت لذلك يكون a ثابت و كون أن مسار مركز عطالة الجسم (S) مستقيم تكون حركته على المستوي المائل مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- المعادلات الزمنية و مخططات الحركة في غياب الاحتكاك :

في غياب الإحتكاكات $(f = 0)$ ، تصبح عبارة التسارع كما يلي :

$$a = g.\sin\alpha$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$v = g.\sin\alpha\ t + C_1$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

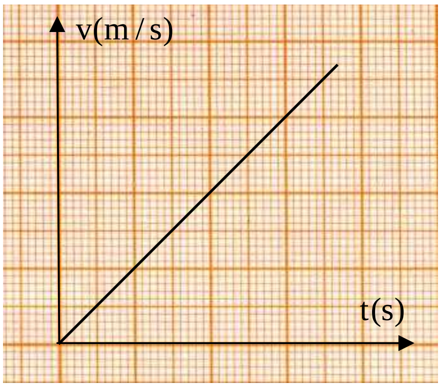
و منه يصبح :

$$\boxed{v = g.\sin\alpha\ t}$$

أو :

$$\boxed{v = a\ t}$$

بيانيا :



- نكامل طرفي $v(t)$ بالنسبة للزمن نجد :

$$x = \frac{1}{2} g.\sin\alpha\ t \quad + C$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow C = 0$$

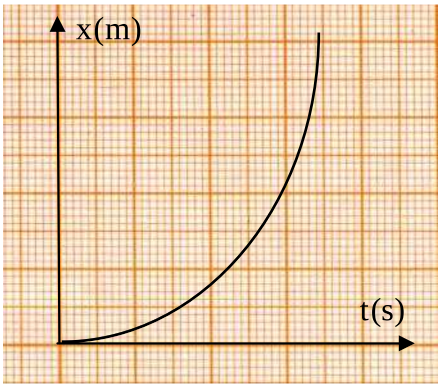
و منه يصبح :

$$\boxed{x = \frac{1}{2} g.\sin\alpha\ t^2}$$

أو :

$$\boxed{x = \frac{1}{2} a\ t^2}$$

بيانيا :



3- عبارة قوة رد فعل المستوي المائل على الجسم (S) :

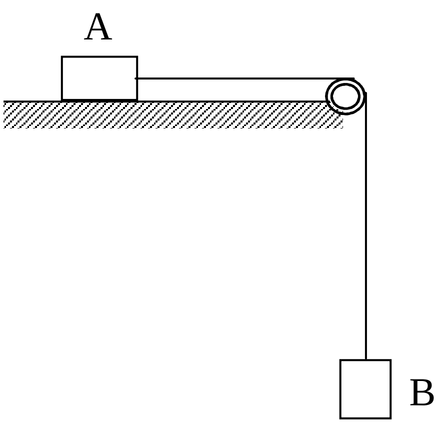
من العلاقة (2) السابقة يكون :

$$\boxed{R = m\, g \cos\alpha}$$

التمرين (2) :

- يتحرك جسم (A) كتلته m_1 و مركز عطالته G_1 ابتداءا من السكون على مستوي أفقي من دون احتكاك بتأثير السقوط الشاقولي لجسم (B) كتلته m_2 و مركز عطالته G_2.

- الجسمان مربوطان بخيط مهمل الكتلة غير قابل للإمتطاط و يمر على بكرة ثابتة مهملة الكتلة بإمكانها الدوران دون احتكاك حول محور أفقي ثابت.

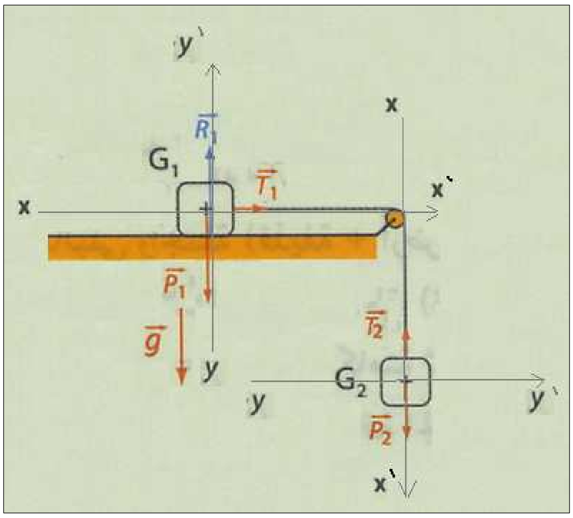


1- أدرس طبيعة حركة الجسمين (A) ، (B) .

2- أكتب عبارة شدة توتر الخيط .

الأجوبة :

1- دراسة طبيعة حركة الجملة :



- كون الخيط غير قابل للإمتطاط و مهمل الكتلة و كون البكرة مهملة الكتلة أيضا يكون للجسمين (A) ، (B) نفس السرعة و التسارع في كل لحظة كما تكون شدة التوتر نفسها في كل نقاط الخيط أي :

$a_1 = a_1 = a$

$T_1 = T_2 = T$

- الجملة المدروسة : الجسم A .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}_1$ ، توتر الخيط $\vec{T}_1$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x + R_x + T_{1x} = m_1\, a_x \\ P_y + R_y + T_{1y} = m_1\, a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + 0 - T_1 = m_1\, a_{1x} \\ -P_1 + R + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1\, a \\ -P_1 + R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1\, a \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ -m_1\, g + R = 0 \,\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

- الجملة المعتبرة : الجسم B .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}_2$، توتر الخيط $\vec{T}_2$
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$$

بتحليل العلاقة الشعاعية بالنسبة للمعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} P_{2x} + T_{2x} = m_2\, a_{2x} \\ P_{2y} + T_{2y} = m_2\, a_{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 - T_2 = m_2\, a_{2x} \\ 0 - 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$m_2\, g - T = m_2\, a \;............\; (3)$$

بجمع العلاقتين (1) ، (3) طرف إلى طرف نجد :

$$T + m_2\, g - T = m_1\, a + m_2\, a$$

$$m_2\, g = (m_1 + m_2)\, a$$

$$\boxed{a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = a_1 = a_2}$$

و عليه فإن كلا من تسارع مركز عطالة الجسم (A) و مركز عطالة الجسم (B) ثابت خلال الزمن , إذن مركزي عطالة الجسمين (A) ، (B) لهما حركة مستقيمة متسارعة بانتظام على الممستوي الأفقي .

2- توتر الخيط :

من العلاقة (1) يكون :

$$T = m_1\, a = m_1 \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}}$$

أو من العلاقة (3) :

$$m_2\, g - T = m_2\, a$$

$$m_2\, g - m_2\, a = T$$

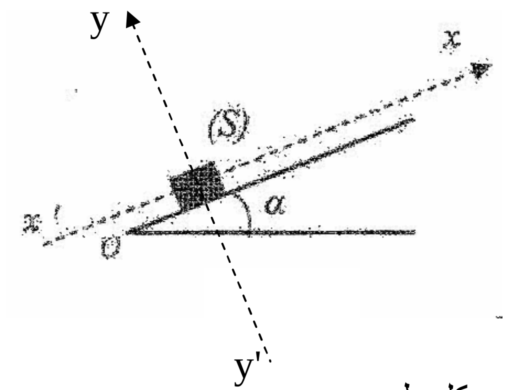
$$T = m_2\, g - m_2 a$$

$$\boxed{T = m_2\,(g - a)}$$

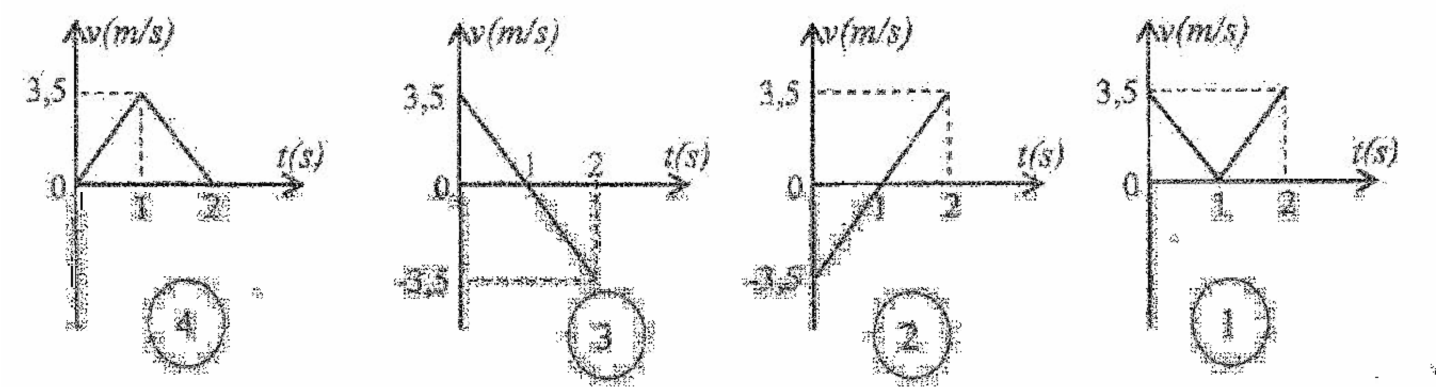
و كل من العلاقتين يؤدي إلى نفس النتيجة .

التمرين (3) :

قذف جسم صلب (S) كتلته m في اللحظة $t = 0$ من النقطة O نعتبرها مبدأ الإحداثيات بسرعة $\vec{v}_0$ نحو الأعلى وفق خط الميل الأعظم لمستو أملس (الشكل) . و عند قطعه مسافة d غير جهة حركته راجعا إلى الأسفل باتجاه موضع قذفه .



1- كم طور في هذه الحركة ، حدد حدود كل طور .
2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، ادرس حركة مركز عطالة الجسم (S) أثناء صعوده المستوي المائل (الطور الأول) ، ثم اكتب المعادلة التفاضلية بدلالة x(t) .
3- هل تتغير عبارة التسارع بعد تغيير جهة حركته ، اشرح .
4- أكتب المعادلتين الزمنيتين للحركة v(t) ، x(t) .
5- باستعمال تجهيز مناسب تمكن التلاميذ من دراسة حركة مركز عطالة (S) و الحصول على أحد مخططات السرعة $v = f(t)$ التالية :

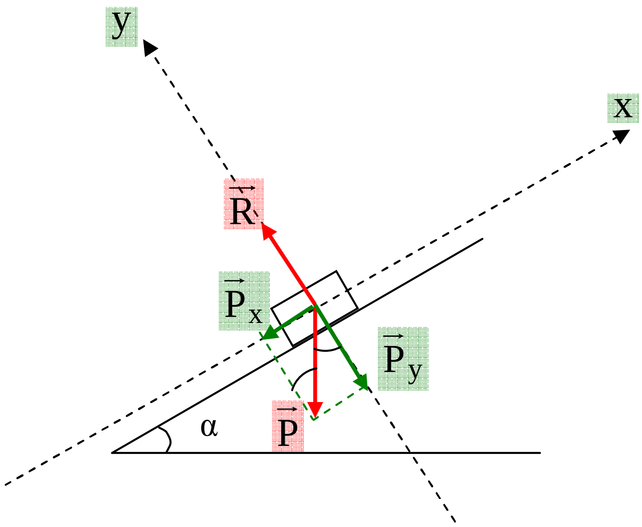


- من بين المخططات الأربعة (1) ، (2) ، (3) ، (4) ، ما هو المخطط الموافق لحركة الجسم (S) برر .
6- اعتمادا على المخطط المختار أوجد :
أ- تسارع الحركة .
ب- السرعة الابتدائية v_0 التي قذف بها الجسم (S) على المستوي المائل .
جـ- الزاوية α التي يميل بها المستوي المائل على الأفق .
د- المسافة d الذي قطعها الجسم الصلب (S) قبل أن يغير جهة حركته ,
يعطى : $g = 9.8\ m.s^{-2}$ ، $\sin21° = 0.36$.

الأجوبة :

1- تحديد أطوار الحركة :
الطور I : من لحظة قذف الجسم (S) إلى لحظة تغير جهة الحركة .
الطور II : من لحظة تغيير جهة حركته إلى لحظة عودته إلى موضع قذفه .

2- دراسة حركة مركز عطالة (S) أثناء صعوده المستوي المائل (الطور I) :



- الجملة المعتبرة : الجسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\, \vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\, \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} - P\, \sin\alpha = m\, a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ - P\, \cos\alpha + R + 0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من العلاقة (1) :

$$- m.g.\sin\alpha = m\, a$$

$$a = - g.\sin\alpha \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = - g.\sin\alpha$$

g ، α ثوابت ، و منه يكون a ثابت ، و بما أن مسار حركة مركز عطالة (S) مستقيم ، تكون طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

4- المعادلتين الزمنيتين $v_x(t)$ ، $x(t)$:

لدينا سابقا :

$$a = - g.\sin\alpha$$

تكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$v = (- g.\sin\alpha)\, t + C$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v_x = v_0$$

بالتعويض :

$$v_0 = - g.\sin\alpha\, (0) + C \rightarrow C = v_0$$

يصبح :

$$v = - g.\sin\alpha\, t + v_0$$

أو :

$$v = a\, t + v_0$$

حيث : a هو تسارع الحركة .

- تكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$x = -\frac{1}{2} g.\sin\alpha\, t^2 + v_0\, t + C'$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow C' = 0$$

يصبح :

$$x = -\frac{1}{2}g.\sin\alpha\, t^2 + v_0\, t$$

أو :

$$x = -\frac{1}{2}a\, t^2 + v_0\, t$$

5- المخطط المناسب للحركة :

- بما أنه خلال طوري الحركة : $a = -g.\sin\alpha$ ، يكون في كل من الطورين $a < 0$.

- في الطور I (صعود الجسم) تكون الحركة في جهة المحور (ox) أي $v > 0$ ، أما في الطور الثاني تكون الحركة في الجهة المعاكسة للمحور (ox) ، أي : $v < 0$.

بعبارة أخرى :

- الطور I : $a < 0$ (الميل سالب) ، $v > 0$
- الطور I : $a < 0$ (الميل سالب) ، $v > 0$

و هذا يوافق المخطط (3) .

6- أ- تسارع الحركة :

$$a = \tan\alpha = \frac{0 - 3.5}{1 - 0} = -3.5\ m/s^2$$

ب- السرعة الابتدائية v_0 :

لدينا :

$$t = 0 \rightarrow v = v_0$$

و من المخطط :

$$t = 0 \rightarrow v = v_0$$

إذن :

$$v_0 = 3.5\ m/s$$

جـ- الزاوية α التي يميل بها المستوي المائل :

مما سبق :

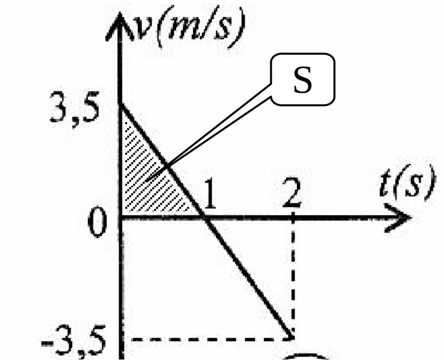
$$a = -g\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = -\frac{a}{g}$$

$$\sin\alpha = -\frac{-3.5}{9.8} = 0.36 \rightarrow \alpha = 21°$$

د- لحظة تغيير جهة الحركة :

يغير الجسم (S) جهة حركته عندما تنعدم سرعته ، و من مخطط الحركة نلاحظ أن المتحرك تنعدم سرعته عند اللحظة $t = 1\ s$ و هي لحظة تغيير جهة حركته .

هـ- المسافة d التي يقطعها الجسم (S) قبل أن يغير جهة حركته :



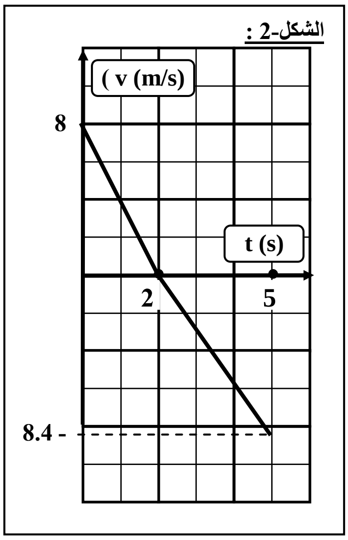
المسافة d تمثل المسافة التي يقطعها الجسم (S) بين لحظة قذفه $t = 0$ و لحظة تغيير جهة حركته $t = 1\ s$ ، و عليه يكون من المخطط $v(t)$:

$$d = S = \frac{3.5\times1}{2} = 0.75m$$

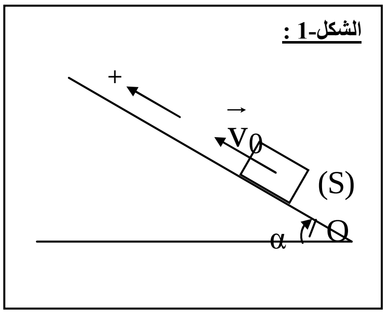
التمرين (4) : (بكالوريا سبتمبر 2003 - علمي) (**) (الحل المفصل : تمرين مقترح 31 على الموقع)

يقذف جسم صلب (S) كتلته $m = 900\ g$ من النقطة (O) نعتبرها مبدأ الإحداثيات بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ وفق خط الميل الأعظم لمستوي يميل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 20°$ (الشكل-1) .
يمثل البيان الموضح في (الشكل-2) مخطط السرعة لحركة الجسم (S) .

الشكل-2 :



الشكل-1 :



1- أ- حدد المجال الزمني لكل طور من طوري الحركة .
ب- حدد طبيعة الحركة في كل طور .
جـ- استنتج تسارع الحركة في كل طور .
2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أنه توجد قوة احتكاك ثابتة $\vec{f}$ ، أحسب شدتها .
3- أكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ لحركة الجسم (S) في كل طور باعتبار مبدأ الأزمنة لحظة القذف ، و مبدأ الفواصل عند النقطة (O) .
يعطى : $\sin20° = 0.34$ ، نعتبر $g = 10\ m/s^2$.

الأجوبة :

1- أ- المجال الزمني لكل طور :
- الطور I : $(t = 0 \rightarrow t = 2\ s)$.
- الطور II : $(t = 2\ s \rightarrow t = 5\ s)$.

ب- طبيعة الحركة في كل طور :

الطور I :
المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث ان $a < 0$ (الميل سالب) ، $v > 0$ يكون $a.v < 0$ و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة بانتظام .

الطور II :
المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث ان $a < 0$ (الميل سالب) ، $v < 0$ يكون $a.v > 0$ و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة بانتظام .

جـ- تسارع الحركة في كل طور :

الطور I :

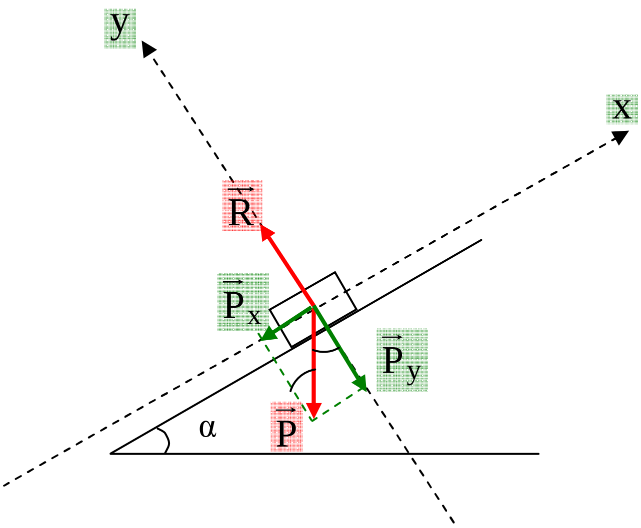
$$a_1 = \frac{0 - 8}{2 - 0} = - 4\ m/s^2$$

الطور II :

$$a_2 = \frac{-8.4 - 0}{5 - 2} = -2.8 \, m/s^2$$

2- إثبات أنه توجد قوة احتكاك :

لإثبات أنه توجد قوة احتكاك نبحث عن قيمة التسارع النظرية باعتبار الاحتكاك مهمل ثم نقارنها بقيمة التسارع التجريبية (نعتبر الطور الأول) .



- الجملة المعتبرة : الجسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \, \vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} = m \, \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور الحركة (ox) .

$- P \sin\alpha = m.a_1'$

$- m.g.\sin\alpha = m.a_1' \rightarrow a_1' = - g.\sin\alpha$

$a_1' = - 10.\sin 20 = - 3.4 \, m/s^2$

نلاحظ أن $a_1' \neq a_1$ ، يدل ذلك على أن فرضية عدم وجود الاحتكاك خاطئة و بالتالي الاحتكاك موجود .

- شدة قوة الاحتكاك :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة جسم (S) مع الأخذ بعين الاعتبار شدة قوة الاحتكاك (نعتبر الطور I) :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \, \vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m \, \vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور الحركة (ox) .

$- P \sin\alpha - f = m.a_1$

$- m.g.\sin\alpha - f = m.a_1$

$- m.g.\sin\alpha - m.a_1 = f \rightarrow f = - m(g.\sin\alpha + a_1)$

$f = - 0.9(10.\sin 20 + (-4)) = 0.54 \, N$

3- المعادلات الزمنية $x(t)$ في كل طور :

الطور I :

المنحنى $v(t)$ معادلته من الشكل :

$v = At + B$

- $A = a_1 = -4$
- $B = 8$ (من المنحنى)

و منه :

$v = - 4 \, t + 8$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$x = - 2 \, t^2 + 8 \, t + C_1$

من الشروط الابتدائية :

$t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow C_1 = 0$

يصبح :

$x = -2t^2 + 8t$

<u>الطور II :</u>

المنحنى v(t) عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل :

$v = A't + B'$

▪ $A' = a_2 = -2.8$

تصبح المعادلة كما يلي :

$v = -2.8\,t + B'$

من المنحنى v(t) :

$t = 2s \rightarrow v = 0$

بالتعويض نجد :

$0 = -2.8\,(2) + B' \rightarrow B' = 5.6$

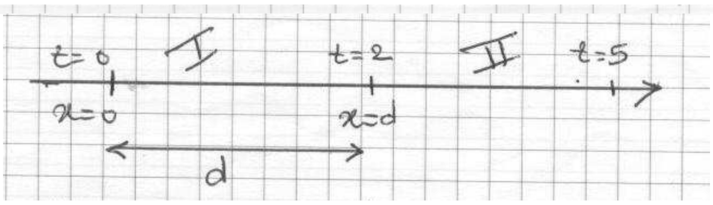
و منه تصبح معادلة السرعة كما يلي :

$v = -2.8\,t + 5.6$

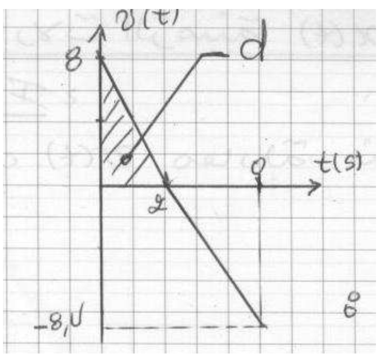
نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$x = -1.4\,t^2 + 5.6\,t + C_2$

بما أن مبدأ الفواصل عند بداية الطور الأول تكون فاصلة مركز عطالة (S) عند اللحظة t = 2 s (لحظة بداية الطور الثاني) مساوي للمسافة d التي قطعها مركز عطالة (S) في الطور الأول ، و يمكن توضيح ذلك كما يلي :



- نحسب d اعتمادا على المساحات من المنحنى v(t) كما يلي :



$$d = \frac{8\,.\,2}{2} = 8\,\text{m}$$

إذن :

$t = 2\text{ s} \rightarrow x = 8\text{ m}$

بالتعويض في المعادلة v(t) نجد :

$$8 = - 1.4\ (2)^2 + 5.6\ (2) + C_2$$

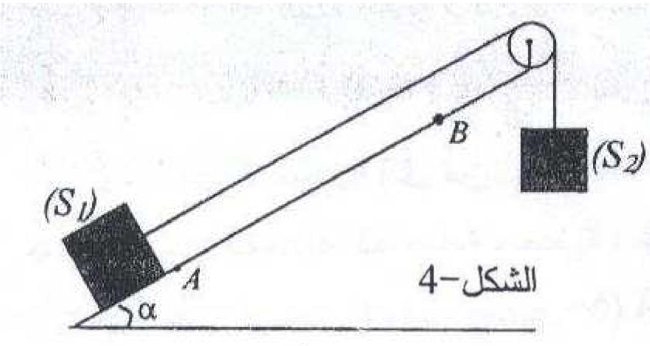
$$C_2 = 8 + (1.4\ .\ 2^2) - (5.6\ .\ 2) = 2.4$$

و منه تصبح المعادلة x(t) في الطور II كما يلي :

$$x = - 1.4\ t^2 + 5.6\ t + 2.4$$

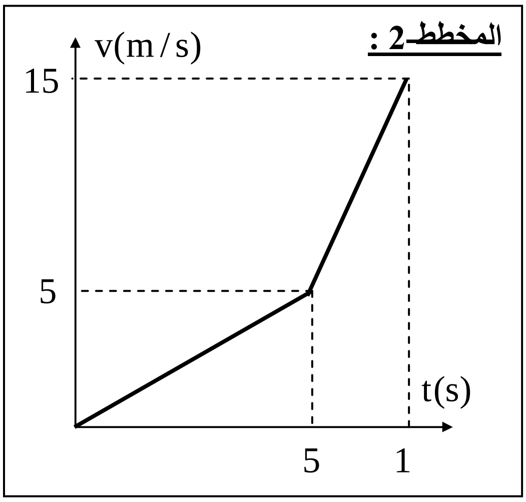
التمرين (5) :

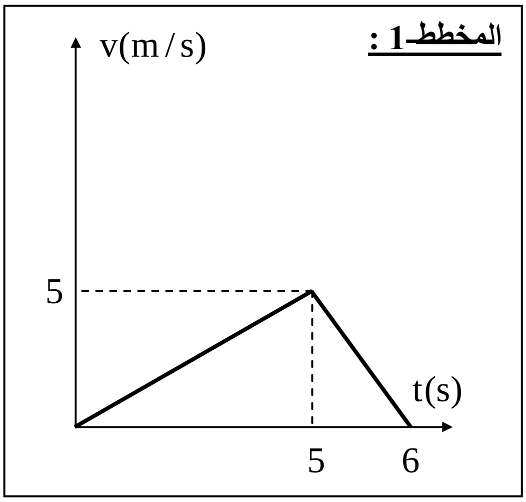
يتصل جسم صلب (S_2) كتلته $m_2 = 300\ g$ ، بواسطة خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط يمر على محز بكرة مهملة الكتلة ، بجسم صلب (S_1) كتلته m_1 يتحرك دون احتكاك على مستو يميل عل الأفق بزاوية $\alpha = 30°$.



1- ما هي قيمة الكتلة m_1 حتى يكون الجسم (S_1) في حالة توازن .

2- نضيف للجسم (S_2) قطعة كتلتها m_0 ، فينطلق الجسم (S_1) من السكون بدون سرعة ابتدائية من الموضع A ، باتجاه الموضع B ، وبعد 5 ثواني من بداية الحركة ينقطع الخيط الذي يربط الجسمين ، يمثل المخططين البيانين التاليين (1) ، (2) تطور سرعتي مركزي عطالتي الجسمين (S_1) ، (S_2) قبل و بعد انقطاع الخيط .





أ- أنسب لكل جسم مخطط سرعته مع التبرير .

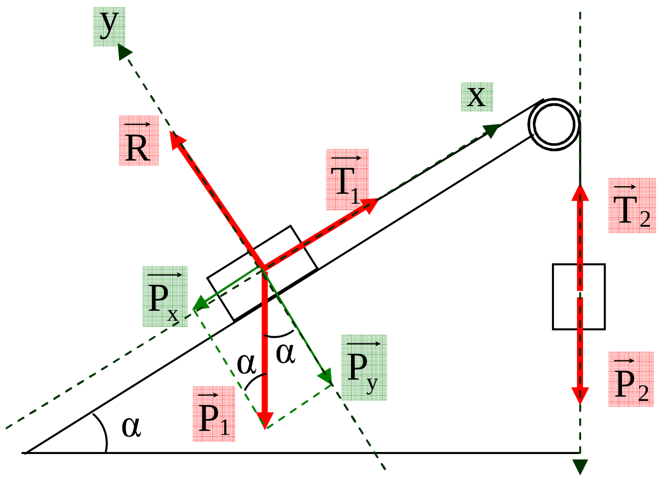
ب- عبر عن تسارعي مركزي عطالة الجسمين (S_1) ، (S_2) قبل و بعد انقطاع الخيط .

جـ- أوجد اعتمادا على المخططين :

- تسارع الجسمين (S_1) ، (S_2) قبل و بعد انقطاع الخيط .
- قيمة الجاذبية g .
- قيمة الكتلة m_0 المضافة .

الأجوبة :

1- قيمة الكتلة m_2 حتى يكون الجسم (S_1) في حالة توازن :



- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي في كافة الدراسة .

- الجملة جسم (S_1) :

- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة التوتر $\vec{T}_1$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في حالة التوزان $\vec{a} = \vec{0}$:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$
$$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 = \vec{0}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور الحركة (ox) :

$$- p_1 \sin\alpha + T_1 = 0 \text{ .... } (1)$$

الجملة جسم (S_2) :

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة التوتر $\vec{T}_2$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في حالة التوزان $\vec{a} = \vec{0}$:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$
$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 + = \vec{0}$$

- بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (ox) :

$$P_2 - T_2 = m_2\, a \text{ .... } (2)$$

بجمع العلاقتين (1) ، (2) مع الأخذ بعين الاعتبار $T_2 = T_1$:

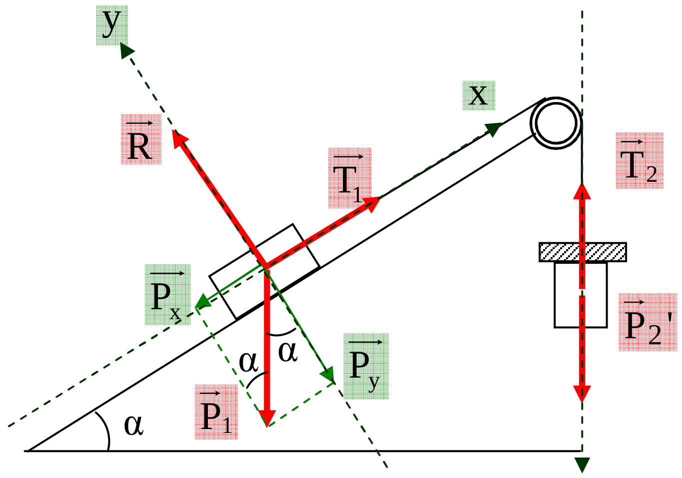
$$- P_1 \sin\alpha + P_2 = 0$$
$$P_2 = P_1 \sin\alpha$$
$$m_2 g = m_1 g.\sin\alpha$$
$$m_2 = m_1.\sin\alpha \rightarrow m_1 = \frac{m_2}{\sin\alpha}$$
$$m_1 = \frac{0.3}{\sin 30°} = 0.6\,\text{kg} = 600\,\text{g}$$

2- أ- المخطط الموافق لكل جسم :

بعد انقطاع الخيط تتناقص سرعة الجسم (S_1) بسبب صعوده المستوي المائل نتيجة قوة الثقل المعاكسة لجهة حركته ، و هذا يتفق مع المخطط-1 ، في حين يواصل الجسم (S_2) حركته المستقيمة المتسارعة (سقوط حر هذه المرة) و هذا يتفق مع المخطط-2 .

ب- عبارتي تسارعي مركزي عطالة الجسمين (S_1) ، (S_2) قبل و بعد انقطاع الخيط :

● قبل انقطاع الخيط :



- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي في كافة الدراسة .

- الجملة جسم (S_1) :

- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة التوتر $\vec{T}_1$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_1 \vec{a}_G$$

$$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}$$

- بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (ox) :

$$- P_1 \sin\alpha + T_1 = m_1 a_x \text{ .... } (3)$$

الجملة جسم (S_2) :

- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة التوتر $\vec{T}_2$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_2 \vec{a}_G$$

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = (m_2 + m_0)\vec{a}$$

- بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (ox) :

$$P_2 - T_2 = (m_2 + m_0)\, a \text{ .... } (4)$$

بجمع العلاقتين (1) ، (2) مع الأخذ بعين الاعتبار $T_2 = T_1$:

$$- P_1 \sin\alpha + P_2 = (m_1 + m_2 + m_0)\, a$$

$$- m_1 g \sin\alpha + (m_2 + m_0)\, g = (m_1 + m_2 + m_0)\, a$$

إذن :

$$\boxed{a = \frac{(m_2 + m_0 - m_1 \sin\alpha)\, g}{m_1 + m_2 + m_0} = a_1 = a_2}$$

● بعد انقطاع الخيط :

بعد انقطاع الخيط تستنتج عبارة تسارع مركز العطالة أحد الجسمين من خلال حذف المقادير المتعلقة بالجسم الثاني في عبارة التسارع قبل انقطاع الخيط كما يلي :

- $a_1' = \dfrac{(0 - m_1 \sin\alpha)g}{m_1 + 0} \rightarrow a_1' = -g.\sin\alpha$
- $a_2' = \dfrac{(m_2 + m_0 - 0)g}{0 + m_2 + m_0} \rightarrow a_2' = g \rightarrow a_2' = \dfrac{(m_2 + m_0)g}{m_2 + m_0} \rightarrow a_2' = g$

- طبيعة الحركة :

g ، m_1 ، m_2 ، α ثوابت ، و كون أن مسار مركز عطالة (S_1) مستقيم ، فالحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

ب- تسارع مركزي عطالة الجسمين (S_1) ، (S_2) قبل و بعد انقطاع الخيط :

من المخططين (1) ، (2) يكون :

- قبل انقطاع الخيط (الطور الأول) :

- $a_2 = a_2 = a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{5-0}{5-0} = 1\,m/s^2$

- بعد انقطاع الخيط (الطور الثاني) :

- $a_1' = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0-10}{7-5} = -5\,m/s^2$
- $a_2' = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{25-5}{7-5} = 10\,m/s^2$.

● قيمة الجاذبية g :

من عبارة a_1' تسارع مركز عطالة (S_1) بعد انقطاع الخيط يكون :

$g = a_2'$

و لدينا سابقا : $a_2' = 10\ m/s^2$ ، إذن : $g = 10\ m/s^2$.

● قيمة الكتلة m_0 المضافة :

من عبارة التسارع قبل انقطاع الخيط :

$$a = \frac{(m_2 + m_0 - m_1 \sin\alpha)g}{m_1 + m_2 + m_0}$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)g + m_0 g}{m_1 + m_2 + m_0}$$

$$(m_1 + m_2)a + m_0 a = (m_2 - m_1.\sin\alpha)g + m_0 g$$

$$(m_1 + m_2)a - (m_2 - m_1.\sin\alpha)g = m_0 g - m_0 a$$

$$(m_1 + m_2)a - (m_2 - m_1.\sin\alpha)g = m_0(g - a) \quad \rightarrow \quad m_0 = \frac{(m_1 + m_2)a - (m_2 - m_1.\sin\alpha)g}{g - a}$$

$$m_0 = \frac{(0.6 + 0.3)1 - (0.3 - 0.6.\sin 30°)10}{10 - 1} = 0.1\,kg = 100\,g$$

سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

عرض نظري و تمارين

05

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية

رياضيات ، تقني رياضي

****

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 07

حدود ميكانيك نيوتن

- إن ميكانيك نيوتن عاجز على تفسير النظام المجهري الشبيه بالنظام الشمسي (ذرة - نواة) ، كما أنه عاجز تماما على تفسير بعض الظواهر الفيزيائية كإصدار المادة لضوء و امتصاصها لضوء ، أما فيما يخص الطاقة المكمنة في الذرة و التي سنتطرق لها فيما بعد ، فهي لا يمكن أن تفسر في ميكانيك نيوتن ، و هنا يظهر ما يسمى بالميكانيك النسبي و ميكانيك الكم .

- الضوء **ذو طبيعة موجية** ، أي عبارة عن أمواج مثله مثل الأمواج الميكانيكية و الأمواج الضوئية ، فهو إذن يمتاز بمقدار يدعى طول الموجة λ وحدته المتر ، كما يمتاز أيضا بمقدار يدعى التواتر f الذي وحدته الهرتز .

- طول الموجة λ يتعلق بالتواتر وفق العلاقة :

$$\lambda = \frac{v}{f} \Leftrightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

حيث : v هي سرعة الضوء في الخلاء (v = 3 . 108 m/s) .

●- فرضية بلاك - أنشتاين :

بالإضافة إلى أن الضوء ذو طبيعة موجية فقد افترض العالم انشتاين لتفسير بعض الضواهر الفيزيائية المستعصية آنذاك ، طبيعة أخرى للضوء و هي **الطبيعة الجسمية** ، حيث اعتبر أن الضوء يتكون من حبيبات دقيقة تدعى الفوتونات ، و الفوتون الواحد يحمل طاقة قدرها :

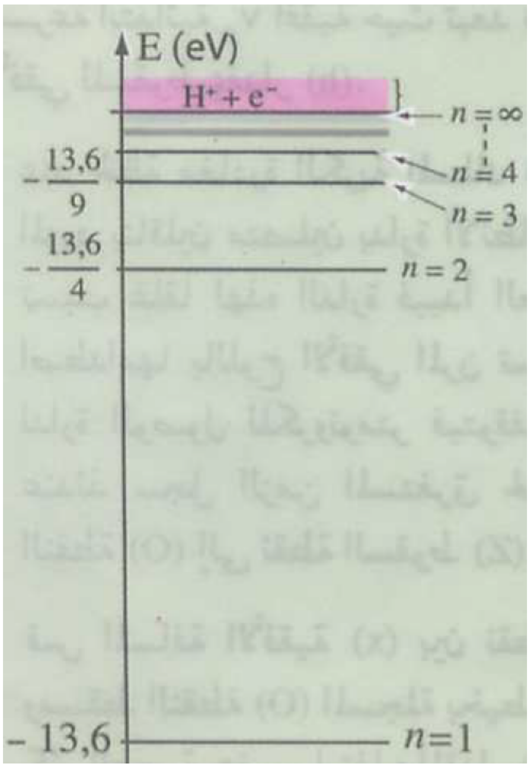
$$E = h . f = \frac{h . C}{\lambda}$$

h : ثابت بلانك حيث يساوي $h = 6.62 \ . \ 10^{-34}$ J.s .
f : تواتر الإشعاع و يقدر بالهرتز (Hz) .
λ : طول الموجة و يقدر بالمتر .

● فرضيات بور - سويات الطاقة :

- بعد دراسات معمقة لأطياف الإنبعات من طرف العالم نيلز بوهر ، و ضع سنة 1913 المسلمات التالية :
▪ إن طاقة الذرة لا تأخذ إلا بعض القيم لذا يقال عنها **مكممة** و تسمى حالات الذرة الموافقة لهذه القيم المميزة من الطاقة ، **سويات الطاقة** .
▪ إن انتقال الإلكترون من سوية طاقة لأخرى يصاحبه امتصاص أو فقدان طاقة على شكل إشعاعات ضوئية وحيدة اللون أي على شكل فوتون .

- إلكترون الذرة يكون موجود على أحد سويات الطاقة للذرة ، أي موجود في مدار موافق لسوية من هذه السويات .
- لكل سوية طاقة رقم نرمز له بـ n ، هذه الأرقام مرتبة من $n = 1$ إلى $n = \infty$ و الشكل التالي يمثل سويات الطاقة في ذرة الهيدروجين :



- عند السوية الموافقة لـ $n = 1$ تكون عندها الذرة في حالتها الأساسية (غير مثارة) .
- عند السوية $n > 1$ تكون الذرة في حالة مثارها و للعودة إلى حالتها الأساسية تصدر الفائض في الطاقة عن طريق بعث فوتون (مثل النواة المثارة عندما تصدر إشعاع γ) ، أي بعث ضوء ، و هذا ما يفسر إصدار الذرات لضوء مثل الضوء الذي يصدره سلك حديدي عندما يسخن بشدة أو مصباح طيفي عندما يتعرض لشرارة كهربائية ، و عندها ينتقل الإلكترون من السوية التي كان عليها إلى سوية أقل ، و بالمثل عندما تمتص الذرة فوتون و هي في الحالة الأساسية تصبح في حالة مثارة ، و عندما تنتقل إلى سوية أعلى .
- عند السوية الموافقة لـ $n = \infty$ يكون الإلكترون بعيد كل البعد عن النواة و في هذه الحالة نقول عن الذرة أنها تشردت .

- عندما ينتقل الإلكترون من سوية n_1 (E_1) إلى سوية أخرى n_2 (E_2) فإن الذرة تمتص أو تصدر فوتون طاقته مساوية للفرق بين هاتين السويتين ($|E_2 - E_1|$) و كون أن طاقة الفوتون هي $E = h.f$ يمكن كتابة :

$$\boxed{E = |E_2 - E_1| = h.f}$$

ملاحظة :

عندما نقول طول موجة و تواتر الفوتون نقصد به طول موجة و تواتر الإشعاع المتكون من هذا الفوتون .

التمرين (1):

تعطى طاقات مختلف سويات ذرة الهيدروجين بالعبارة :

$$E = \frac{-13.6}{n^2}\,(eV)$$

حيث n العدد الكمي الرئيسي .

1- ما هي أدنى طاقة لازمة لتشرد ذرة الهيدروجين و هي في الحالة الأساسية ؟

2- أحسب الطاقة التي تمتصها ذرة الهيدروجين ، ليقفز الإلكترون :

أ- من السوية $n = 1$ إلى السوية $n = 2$.

ب- من السوية $n = 1$ إلى السوية $n = 3$.

3- لتكن الفوتونات ذات الطاقات التالية على الترتيب :

$$E_3 = 10.20\ eV \ ،\ E_2 = 15.90\ eV \ ،\ E_1 = 04.50\ eV$$
$$E_6 = 15.00\ eV \ ،\ E_5 = 12.08\ eV \ ،\ E_4 = 11.00\ eV$$

حدد من بين الفوتونات السابقة من هي القادرة على إثارة ذرة الهيدروجين و هي في الحالة الأساسية مبررا إجابتك .

4- أحسب تواتر الإشعاع الصادر عندما يقفز الإلكترون في ذرة الهيدروجين من السوية $n = 3$ إلى السوية $n = 2$.

يعطى :

ثابت بلانك : $h = 6.62 . 10^{-34}\ J.s$ ، $1eV = 1.6 . 10^{-19}\ J$

الأجوبة :

1- أدنى طاقة لازمة للتشرد :

التشرد يكون من أجل انتقال سوية الطاقة من الحالة $n = 0$ إلى الحالة $n = \infty$ و علية تكون قيمة طاقة التشرد كما يلي :

$$E = E_{(n=\infty)} - E_{(n=0)}$$
$$E = \frac{-13.6}{(\infty)^2} - \frac{-13.6}{(1)^2} = 0 + 13.6 = 13.6\ MeV$$

2- الطاقة التي تمتصها ذرة الهيدروجين عندما يقفز الإلكترون من السوية $n = 1$ إلى السوية $n = 2$:

$$E = E_{(n=2)} - E_{(n=1)}$$
$$E = \frac{-13.6}{(2)^2} - \frac{-13.6}{(1)^2} = -3.4 - (-\ 13.6) = 10.2\ MeV$$

- الطاقة التي تمتصها ذرة الهيدروجين عندما يقفز الإلكترون من السوية $n = 1$ إلى السوية $n = 3$:

$$E = E_{(n=3)} - E_{(n=1)}$$
$$E = \frac{-13.6}{(3)^2} - \frac{-13.6}{(1)^2} = -1.51 - (-\ 13.6) = 12.09\ MeV$$

3- الفوتونات القادرة على إثارة ذرة الهيدروجين :

الفوتون الذي يمكنه إثارة ذرة الهيدروجين هو الفوتون الذي يجعل الإلكترون ينتقل من سوية $n_1 = 1$ (الأساسية) إلى سوية n (حيث n عدد طبيعي) و تكون طاقته مساوية عندئذ لـ :

$$E = E_{(n)} - E_{(n=1)}$$

$$E = \frac{-13.6}{(n)^2} - \frac{-13.6}{(1)^2} = \frac{-13.6}{n^2} + 13.6$$

$$\frac{13.6}{n^2} = 13.6 - E \rightarrow n^2 = \frac{13.6}{13.6 - E} \rightarrow \frac{13.6}{n^2} = 13.6 - E \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - E}}$$

- $E_1 = 04.50 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 4.50}} = 1.22$
- $E_2 = 15.90 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 15.9}} = ?$
- $E_3 = 10.20 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 10.20}} = 2$
- $E_4 = 11.00 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 11.00}} = 3.31$
- $E_5 = 12.08 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 12.08}} \approx 3$
- $E_6 = 15.00 \rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{13.6 - 15.00}} \approx ?$

إذن الفوتونات القادرة على إثارة ذرة الهيدروجين هي الفوتونات ذات الطاقات :

- $E_3 = 10.20$ eV هو يجعل الإللكترون يقفز من السوية الأساسية إلى السوية $n = 2$.
- $E_5 = 12.08$ eV هو يجعل الإللكترون يقفز من السوية الأساسية إلى السوية $n = 3$.

4- تواتر الإشعاع الصادر :

عندما يقفز الإلكترون من السوية $n = 3$ إلى السوية $n = 2$ تصدر ذرة الهيدروجين فوتون طاقته :

$$E = E_{(n=3)} - E_{(n=2)}$$

$$E = \frac{-13.6}{(3)^2} - \frac{-13.6}{(2)^2} = -1.51 - (-\ 3.40) = \quad 1.51 + 3.40 = 1.89\ \text{MeV}$$

و هذا الفوتون يوافق إشعاع تواتره ν حيث :

$$E = h\nu \rightarrow \nu = \frac{E}{h}$$

$$\nu = \frac{1.89 \,.\, 1.6 \,.\, 10^{-19}}{6.62 \,.\, 10^{-34}} = 4.57 \,.\, 10^{14}\ \text{Hz}$$

سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

عرض نظري و تمارين

05

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

****

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 08

سلسلة تمارين-1 (مستوى 02)

التمرين (1):

قمر اصطناعي (S) كتلته m يدور حول الأرض وفق مسار دائري على ارتفاع h عن سطحها ، دوره T .

1- حدد المرجع الذي تتم فيه دراسة حركة هذا القمر الاصطناعي ؟ عرفه و ما هي الفرضية المتعلقة بهذا المرجع و التي تسمح بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ؟

2- اشرح لماذا لا يسقط القمر الإصطناعي على الأرض رغم خضوعه إلى قوة تجذبه باتجاه الأرض .

3- أثبت أن قيمة الجاذبية على ارتفاع h من سطح الأرض يعبر عنها بالعلاقة :

$$g = \frac{G.M}{(R+h)^2}$$

4- أثبت أنه يعبر عن الجاذبية g في مدار القمر الإصطناعي بدلالة الجاذبية g_0 على سطح الأرض بالعلاقة :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

5- عبر عن الطاقة الإجمالية للجملة (قمر اصطناعي ، أرض) ، بدلالة : كتلة القمر الإصطناعي m و سرعته v

الأجوبة :

1- المرجع الذي تتم فيه دراسة حركة القمر الاصطناعي هو المرجع المركزي الأرضي (الجيومركزي) .

تعريفه :

هو مرجع مبدأ معلمه منطبق على مركز الأرض و محاوره الثلاث تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة نعتبرها ثابتة بالنسبة لمركز الأرض .

- يسمح بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في هذا المرجع ، بعدما يفترض أنه غاليلي .

3- إثبات $g = \frac{G.M}{(R+h)^2}$:

- يخضع القمر الاصطناعي إلى قوة الجذب العام $\vec{F}$ كما ذكرنا سابقا ، هذه القوة تمثل أيضا قوة الثقل $\vec{P}$ ، أي :
$P = F$

و حيث أن : $P = mg$ ، $F = G\frac{mM}{r^2}$ ، يكون :

$$m\,g = G\frac{m.M}{r^2} \rightarrow g = \frac{GM}{r^2} \rightarrow g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

و هي عبارة الجاذبية على الارتفاع h من سطح الأرض .

4- إثبات $g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$:

لدينا سابقا :

$$g = \frac{G.M}{(R+h)^2}$$

حيث h هو الارتفاع عن سطح الأرض ، و على سطح الأرض ، أين $h = 0$ ، يمكن كتابة :

$$g_0 = \frac{G.M}{R^2}$$

حيث g_0 هي قيمة الجاذبية على سطح الأرض .

- بقسمة عبارة g على g_0 طرف إلى طرف نجد :

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\frac{G.M}{(R+h)^2}}{\frac{G.M}{R^2}} = \frac{G.M}{(R+h)^2}.\frac{R^2}{G.M} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \rightarrow g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

5- عبارة الطاقة الإجمالية للجملة (قمر اصطناعي ، أرض) بدلالة m ، v ، h ، G ، M ، R :

$$E = E_C + E_{PP}$$

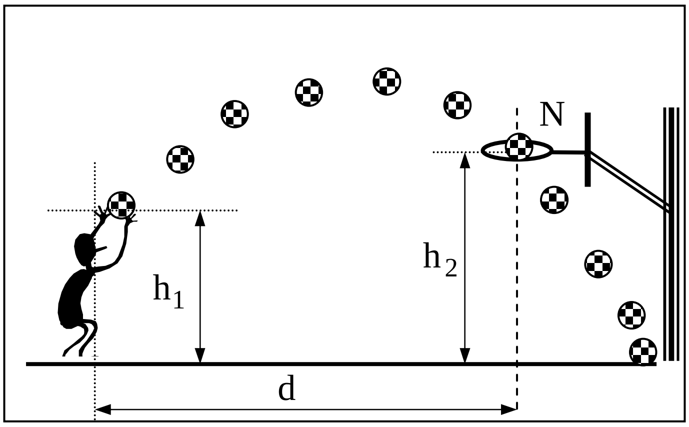
$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 + mgh$$

و جدنا سابقا ، على الارتفاع h من سطح الأرض : $g = \frac{GM}{(R+h)^2}$ ، و منه يصبح :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + m\frac{g.M}{(R+h)^2}h \rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{m.g.M.h}{(R+h)^2}$$

التمرين (2) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 42 على الموقع)

في النقطة (o) من أرضية ملعب كرة السلة يوجد لاعب (A) يريد أن يقذف كرة بسرعة ابتدائية v_0 يصنع شعاعها مع الأفق الزاوية $\alpha = 45°$ باتجاه السلة التي نعتبرها حلقة دائرية مركزها (N) ، و موجودة على ارتفاع $h_2 = 3\ m$ من سطح الأرض ، عندما تغادر الكرة يد اللاعب في نقطة (M) من الملعب يكون مركز عطالتها (الكرة) على ارتفاع $h_1 = 2\ m$ من سطح الأرض (الشكل) . نعتبر أن الهدف يسجل عندما يمر مركز الكرة بمركز السلة .



1- باعتبار مبدأ الأزمنة لحظة قذف اللاعب للكرة ، و مبدأ الإحداثيات عند النقطة (o) موضع اللاعب (A) على أرضية الملعب ، بحيث يكون المحور (ox) منطبق على الأرض و متجه نحو الشاقول المار من مركز السلة ، و المحور (oy) يكون عمودي على أرضية الملعب و متجه نحو الأعلى . نعتبر $g = 10\ m/s^2$.

أ- أدرس طبيعة حركة الكرة في الملعب .

ب- أكتب المعادلات الزمنية للحركة و كذا معادلة المسار مبينا طبيعته .

2- إذا كان اللاعب (A) متوقف لحظة قذفه للكرة ، و هو يبعد عن الشاقول المار من مركز السلة بمقدار $d = 11\ m$.

أ- بأي سرعة إبتدائية v_0 يجب أن يقذف اللاعب الكرة حتى يسجل الهدف .

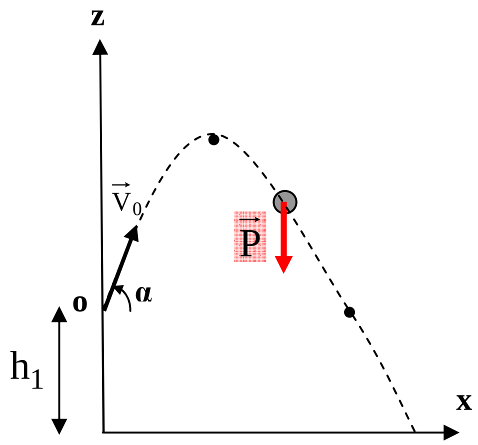
ب- ما هي المدة الزمنية التي تستغرقها الكرة منذ لحظة قذفها من طرف اللاعب إلى غاية دخولها السلة .

جـ- أحسب سرعة الكرة لحظة مرورها بمركز السلة و كذا الزاوية β التي يصنعها مع الأفق .

3- بإهمال نصف قطر الكرة أمام أبعاد أرضية الملعب ، أوجد موقع سقوط الكرة على الأرض ، بالنسبة إلى اللاعب (A) .

4- نفرض أن اللاعب (B) من الفريق المنافس يقف بين اللاعب (A) و السلة وذلك على بعد $d' = 1\ m$ من اللاعب (A) ويحاول اعتراض مسار الكرة بالقفز شاقوليا رافعا يديه إلى الأعلى حيث تبلغ أطراف أصابعه الإرتفاع $h_3 = 3.5\ m$ ، فإذا قذف اللاعب (A) الكرة بنفس السرعة السابقة v_0 .

فهل يتمكن من تسجيل الهدف هذه المرة . اشرح .



الأجوبة :

1- أ- دراسة طبيعة الحركة :

- الجملة المدروسة : كرة (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oz) :

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -P = m\,a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -m\,g = m\,a_z \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

<u>إذن :</u>

- مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .
- مسقط حركة الكرة على المحور oz هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

<u>ب- المعادلات الزمنية و معادلة المسار :</u>

- نكامل طرفين عبارة التسارع بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_z = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} v_0 \cos\alpha = C_1 \rightarrow C_1 = v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha = -g\,(0) + C_2 \rightarrow C_2 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه يصبح :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -g\,t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

نكامل طرفي عبارة السرعة بالنسبة للزمن فنجد :

$$\vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t + C_1' \\ z = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_2' \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow \vec{r} \begin{cases} x = 0 \\ z = h_1 \end{cases}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos\alpha\,(0) + C_1' \rightarrow C_1' = 0 \\ h_1 = -\frac{1}{2} g\,(0)^2 + v_0 \sin\alpha(0) + C_2' \rightarrow C_2' = h_1 \end{cases}$$

يصبح :

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ z = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h_1 \end{cases}$$

من المعادلة $x = f(t)$: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ بالتعويض في $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) + h_1$$

$$z = -\frac{g}{2{v_0}^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x + h_1$$

2- قيمة v_0 حتى يسجل االهدف :

- مركز السلة يبعد عن سطح الأرض بقدار $h_2 = 3\ m$ و يبعد أفقيا على المحور (oy) بمقدار $d = 11\ m$ ، فهذا يعني أن احداثيي مركزها N تكون كما يلي :

$$(x_N = 11\ m\ ,\ z_N = 3\ m)$$

بالتعويض في معادلة المسار نجد :

$$z_N = -\frac{g}{2{v_0}^2 \cos\alpha^2} {x_N}^2 + \tan\alpha\, x + h_1$$

$$\frac{g}{2{v_0}^2 \cos\alpha^2} {x_N}^2 = \tan\alpha\, x + h_1 - z_N$$

$$g \,.\, {x_N}^2 = 2{v_0}^2 \cos\alpha^2 (\tan\alpha\,.x + h_1 - z_N)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,.\,{x_N}^2}{2\cos\alpha^2\ (\tan\alpha\,.x_N + h_1 - z_N)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{10\,.\,11^2}{2\cos 45^2\ ((\tan 45\,.11) + 2 - 3)}} = 11.16\ m/s$$

ب- المدة الزمنية المستغرقة حتى بلوغ مركز السلة :

لدينا : $x_N = 11\ m$ ، بالتعويض في $x(t)$:

$$11 = 11.16 \cos\alpha\, t_N \ \rightarrow\ t_N = \frac{11}{11.16\,.\cos 45} = 1.30\ s$$

جـ- سرعة الكرة لحظة مرورها بمركز السلة N :

$$v_N = \sqrt{{v_{xN}}^2 + {v_{zN}}^2}$$

لدينا : $t_N = 1.30\ s$ بالتعويض في $\bar{v}(t)$ نجد :

$$\vec{v}_N\begin{cases} v_{xN} = 11.16\,.\cos 45 = 8.49\ m/s \\ v_{zN} = (-10\,.1.30) + (11.16\,.\sin 45) = -4.51\ m/s \end{cases}$$

إذن :

$$v_N = \sqrt{(8.49)^2 + (-4.51)^2} \approx 9.57 \text{ m/s}$$

الزاوية التي يصنعها

3- إمكانية تسجيل الهدف :

اللاعب (B) يبعد عن اللاعب (A) الموجود في مبدأ المعلم بمقدار d' = 1 m ، هذا يعني أن فاصلة النقطة (B) التي تنتمي إلى المحور (ox) و الموافقة للموضع الموجود على أرضية الملعب و الذي قفز منه اللاعب (B) هي $x_B = d' = 1$ m

اللاعب (B) تبلغ أطراف أصابعه علو لا يتعدى $h_3 = 3.2$ m ، و منه إذا مرت الكرة فوق هذا العلو لا يمكن لهذا اللاعب أن يتصدى لها ، و بالتالي يسجل الهدف ، بينما إذا مرت الكرة على علو يساوي أو أقل من هذا الارتفاع $h_3 = 3$ m الذي تبلغه أصابع اللاعب (B) عند قفزه ، فإنه يمكنه أن يتصدى للكرة و بالتالي يمنع اللاعب (A) من تسجيل الهدف .

إذن لمعرفة إمكانية تسجيل الهدف أم لا ، نحسب علو الكرة عن الأرض في النقطة التي تنتمي إلى المحور (ox) و الموافقة للموضع الذي قفز منه اللاعب (B) .

بتعويض $x_B = 2.94$ m في معادلة المسار نجد :

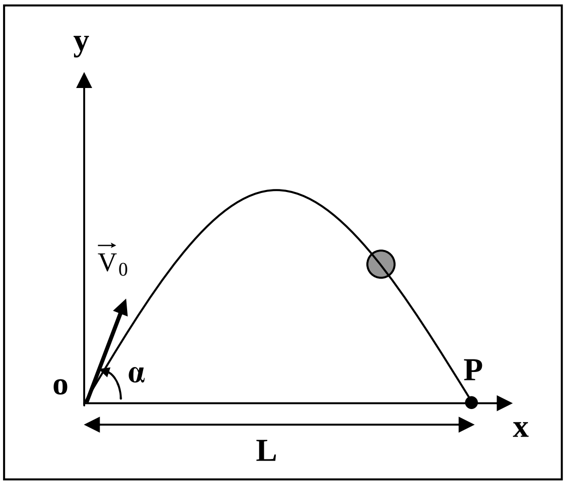
$$z_B = -\frac{10}{2(11.16)^2 \cos 45^2}(1)^2 + (\tan 45 . 1) + 2 = 3.07 \text{ m}$$

- و هو علو الكرة عن الأرض في الموضع الذي قفز منه اللاعب B .

- نلاحظ أن علو الكرة أقل من أقصى علو تبلغه أطراف أصابع اللاعب (B) (2.94 < 3.5) ، نستنتج أن اللاعب (B) يمكنه أن يتصدى للكرة و بالتالي الهدف لا يسجل .

التمرين (3) :

يراد لقذيفة مدفع إن تصل إلى هدف P يبعد عن نقطة القذف بمسافة L = 3 km ، و ذلك عند قذفها من نقطة (O) من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $v_0 = 200$ m/s يصنع شعاعها الزاوية α مع الأفق .



إذا علمت أن معادلة المسار القذيفة في المعلم المبين في الشكل يعبر عنها بالعلاقة :

$$y = \frac{-g}{2\, v_0^{\,2} \cos \alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x$$

1- عبر عن زاوية الرمي α بدلالة g ، L ، v_0 .
2- عرف المدى .
3- بين أن مدى القذيفة يكون أعظمي من أجل $\alpha = 45°$ عندما تكون سرعة القذف ثابتة .
4- ما هي قيمتي الزاوية α التي يجب أن تصنعها ماسورة المدفع مع المستوي الأفقي حتى تسقط القذيفة في الموضع P .
يعطى : $g = 10\ m/s$ ، $\sin2\alpha = 2\cos\alpha.\sin\alpha$ ، $\sin50° = 0.75$.

الأجوبة :

1 - عبارة α بدلالة g ، L ، v_ℓ :
عند الموضع لدينا $x_P = L$ ، $y_P = 0$ ، بالتعويض في معادلة المسار :

$$0 = -\frac{g}{2\,v_0{}^2.\cos\alpha^2}L^2 + \tan\alpha\,.\,L \;\rightarrow\; \frac{g}{2\,v_0{}^2.\cos\alpha^2}L^2 = \tan\alpha\,.\,L$$

$$\frac{g}{2\,v_0{}^2.\cos\alpha^2}L = \tan\alpha \;\rightarrow\; g.L = 2\,v_0{}^2\cos\alpha^2.\tan\alpha$$

$$g.L = 2\,v_0{}^2\cos\alpha^2.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \;\rightarrow\; g.L = 2\,v_0{}^2\cos\alpha\,.\,\sin\alpha$$

$$g.L = v_0{}^2(2\cos\alpha\,.\,\sin\alpha)$$

نعلم أن : $\sin2\alpha = 2\cos\alpha.\sin\alpha$ ، و منه يصبح :

$$g.L = v_0{}^2\sin2\alpha \;\rightarrow\; \sin2\alpha = \frac{g.L}{v_0{}^2}$$

2- تعريف المدى :
هو المسافة الأفقية بين موضع القذف و موضع اصطدام القذيفة بالمستوي الأفقي المار من موضع القذف .

3- إثبات أن المدى يكون أعظمي من أجل $\alpha = 45°$ عندما تكون سرعة القذف ثابتة :
من العبارة السابقة يمكن كتابة :

$$L = \frac{v_0{}^2.\sin2\alpha}{g}$$

بالاعتماد على هذه العبارة ، يكون المدى أعظمي عندما يكون :

$$\sin2\alpha \rightarrow 2\alpha = 90° \rightarrow \alpha = 45°$$

4- قيمتي الزاوية α :
مما سبق وجدنا :

$$\sin2\alpha = \frac{g.L}{v_0{}^2} \;\rightarrow\; \sin2\alpha = \frac{10\;.\;3000}{(200)^2} = 0.75$$

$$\sin2\alpha = \sin50° \;\rightarrow\; \begin{cases} 2\alpha_1 = 50° \\ 2\alpha_2 = 180 - 50 = 130° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 25° \\ \alpha_2 = 65° \end{cases}$$

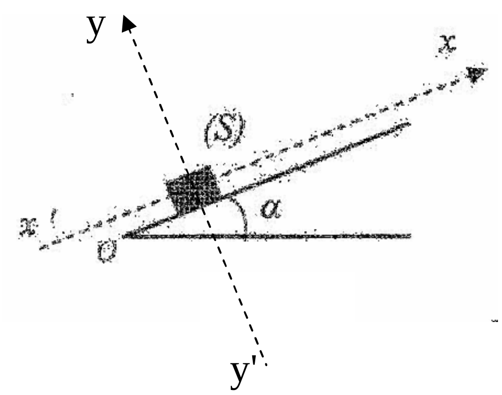
نلاحظ : $\alpha_1 + \alpha_2 = 25° + 65° = 90°$

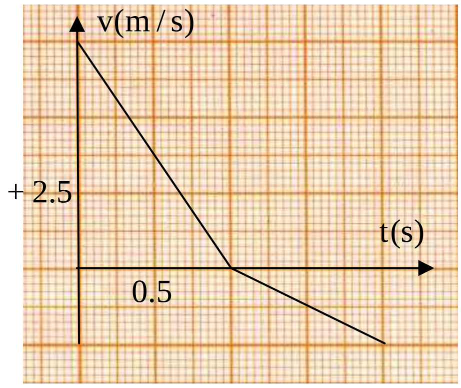
التمرين (4) :

من أسفل مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية α ، نقذف عند اللحظة $t = 0$ جسم صلب (S) كتلته $m = 200\ g$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ موازية للمستوي المائل ، عندما يقطع الجسم (S) مسافة d يغير جهة حركته باتجاه موضع القذف . نعتبر أن الجسم (S) أثناء حركته يخضع إلى تأثير قوة احتكاك $\vec{f}$ شدتها ثابتة .

يعطى $g = 10\ m/s^2$.

المخطط المرفق يمثل تطور سرعة مركز عطالة الجسم (S) على المستوي خلال طوري الحركة .





1- بتطبيق قانون نيتون الثاني على الجملة (S) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي ، أدرس طبيعة الحركة خلال طوري الحركة .

2- اعتمادا على مخطط الحركة ، أوجد :

أ- تسارع الحركة في كل طور .

ب- شدة قوة الاحتكاك .

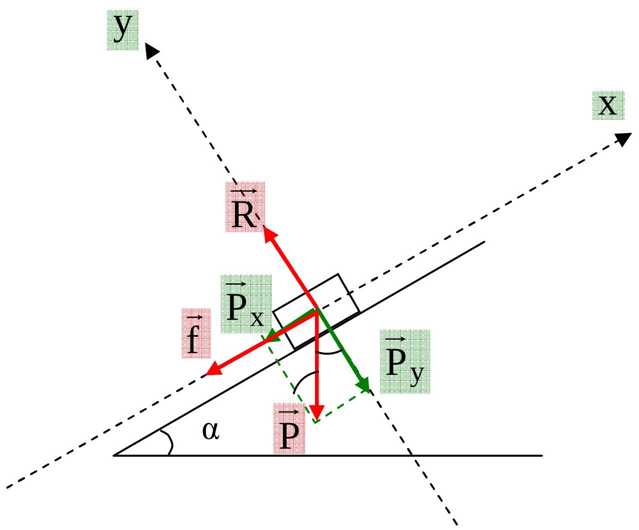
جـ- قيمة الزاوية α التي يميل بها المستوي المائل على الأفق .

● كتلة الجسم B .

الأجوبة :

1- عبارة التسارع خلال طوري الحركة :

● الطور الأول (صعود المستوي المائل) :



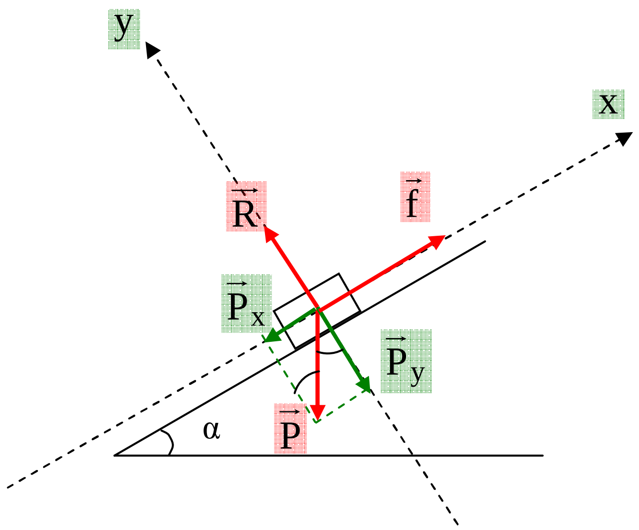
• الجملة المعتبرة : الجسم (S) .
• مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
• القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
• بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور الحركة (ox) :

$$-P\sin\alpha - f = m\,a_1$$
$$-m.g.\sin\alpha - f = m.a_1 \;\rightarrow\; a_1 = \frac{-m\,g\sin\alpha - f}{m}$$

• الطور الثاني (نزول المستوي المائل) :



• بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور الحركة (ox) :

$$-P\sin\alpha + f = m\,a_2$$
$$-m.g.\sin\alpha + f = m.a_2 \;\rightarrow\; a_2 = \frac{-m\,g\sin\alpha + f}{m}$$

2- أ- تسارع الحركة في كل طور :
اعتمادا على مخطط الحركة :

▪ $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{3.2.5}{2\;.0.5} = -7.5\,m/s^2$

▪ $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{1.2.5}{2\;.0.5} = -2.5\,m/s^2$

ب- شدة قوة الاحتكاك :

نطرح عبارة a_1 من a_2 فنجد :

$$a_2 - a_1 = \frac{-m\,g\sin\alpha + f}{m} - \frac{-m\,g\sin\alpha - f}{m}$$

$$a_2 - a_1 = \frac{-m\,g\sin\alpha + f + m\,g\sin\alpha + f}{m}$$

$$a_2 - a_1 = \frac{2f}{m} \rightarrow f = \frac{(a_2 - a_1)m}{2} .$$

$$f = \frac{(-2.5 - (-7.5)) .\ 0.2}{2} = 0.5\ N$$

جـ- قيمة الزاوية α :

الطريقة-1 :

من عبارة تسارع الحركة في الطور الأول :

$$a_1 = \frac{-m\,g\sin\alpha - f}{m}$$

$$a_1.m = -m.g.\sin\alpha - f$$

$$m.g.\sin\alpha = -f - a_1 m \rightarrow \sin\alpha = \frac{-f - a_1 m}{m.g}$$

$$\sin\alpha = \frac{(-0.5) - ((-7.5).0.2)}{0.2\ .\ 10} = 0.5 \rightarrow \alpha = 30°$$

الطريقة-2 :

من عبارة تسارع الحركة في الطور الثاني :

$$a_2 = \frac{-m\,g\sin\alpha + f}{m}$$

$$a_2.m = -m.g.\sin\alpha + f$$

$$m.g.\sin\alpha = f - a_2 m \rightarrow \sin\alpha = \frac{f - a_1 m}{m.g}$$

$$\sin\alpha = \frac{(0.5) - ((-2.5).0.2)}{0.2\ .\ 10} = 0.5 \rightarrow \alpha = 30°$$

تمارين مقترحة

التمرين (5) : (بكالوريا 2009 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 05 على الموقع)

ينتمي القمر الاصطناعي جيوف أ (Giove – A) إلى برنامج غاليليو الأوروبي لتحديد الموقع المكمل للبرنامج الأمريكي GPS . نعتبر القمر الإصطناعي جيوف أ (Giove – A) ذي الكتلة $m = 700\ kg$ نقطيا ونفترض أنه يخضع إلى قوة جذب الأرض فقط .

يدور القمر جيوف أ (Giove – A) بسرعة ثابتة في مدار دائري مركزه (o) على ارتفاع $h = 23.6\ .\ 10^3\ km$ من سطح الأرض .

1/ في أي مرجع تتم دراسة حركة هذا القمر الاصطناعي ؟ وما هي الفرضية المتعلقة بهذا المرجع و التي تسمح بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ؟

2/ أوجد عبارة تسارع (Giove – A) و عين قيمته .

3/ أحسب سرعة القمر (Giove – A) على مداره .

4/ عرف الدور T ثم عين قيمته بالنسبة للقمر (Giove – A) .

5/ أحسب الطاقة الإجمالية للجملة ((Giove – A) ، أرض) .

المعطيات :

ثابت الجذب العام : $G = 6.67\ .\ 10^{-11}\ SI$

كتلة الأرض : $M_T = 5.98\ .\ 10^{24}\ kg$

نصف قطر الأرض : $R_T = 6.38\ .\ 10^3\ km$.

أجوبة مختصرة :

1) تتم دراسة حركة القمر الاصطناعي في معلم جيومركزي (مركزي أرضي) ، - الفرضية المتعلقة بهذا المرجع و التي تسمح بتطبيق قانون نيوتن الثاني هي : أن يكون المعلم الجيومركزي غاليليا ، و حتى يتحقق ذلك يجب أن يكون دور حركة القمر الإصطناعي صغير جدا مقارنة مع دور حركة الأرض حول الشمس .

2) $a_G = \dfrac{G.M_T}{(R+h)^2} = 0.44\ m/s^2$ ، 3) $v = \sqrt{\dfrac{G.M_T}{(R+h)}} = 3.65.10^3\ m/s$

4) تعريفه ← الدور هو الزمن اللازم لانجاز دورة واحدة من طرف القمر الإصطناعي حول الأرض ،

قيمته ← $T = \dfrac{2\pi\, r}{v} = \dfrac{2\pi\,(R+h)}{v} = 5.16.10^4\ s = 14.33\,h$

5) باعتبار سطح الأرض مرجعا لحساب الطاقة الكامنة الثقالية و بإهمال الطاقة الحركية الدورانية للأرض يكون :

$E = \dfrac{1}{2}mv^2 + m\,g\,h = 1.19.10^{10}\ J$ ، حيث : $g = a_G = 0.44\ m/s^2$.

يمكن أيضا استنتاج العلاقة التالية : $g = \dfrac{G.M_T}{r^2}$.

التمرين (6) : (بكالوريا 2010 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 11 على الموقع)

لدراسة حركة سقوط جسم صلب (S) كتلته m شاقوليا في الهواء ، استعملت كاميرا رقمية (Webcam) ، عولج شريط الفيديو ببرمجية "Avistep" في جهاز الإعلام الآلي فتحصلنا على النتائج التالية :

t(ms)	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$v(m.s^{-1})$	0	0.60	0.90	1.02	1.08	1.10	1.12	1.13	1.14	1.14

1- أ/ ارسم المنحنى البياني الممثل لتغيرات السرعة v بدلالة الزمن : $v = f(t)$.

السلم : $1\text{ cm} \to 0.20\text{ m/s}^{-1}$ ، $1\text{cm} \to 0.1\text{ s}$.

ب/ عين قيمة السرعة الحدية v_{lim} .

جـ/ كيف يكون الجسم الصلب (S) متميزا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظامين انتقالي و دائم ؟

د/ احسب تسارع حركة (S) في اللحظة $t = 0$.

2/ تعطى المعادلة التفاضلية لحركة (S) بالعبارة : $\frac{dv}{dt} + Av = C(1 - \frac{\rho V}{m})$ ، حيث ρ الكتلة الحجمية للهواء ، V حجم (S) .

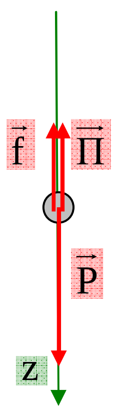
أ/ مثل القوى الخارجية المطبقة على مركز عطالة (S) .

ب/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أوجد المعادلة التفاضلية لحركة مركز عطالة (S) بدلالة السرعة v و ذلك في حالة السرعات الصغيرة .

و بين أن : $A = \frac{k}{m}$ و $C = g$ حيث : k ثابت يتعلق بقوى الاحتكاك .

جـ/ استنتج قيمة دافعة أرخميدس و قيمة الثابت k .

تعطى : $g = 9.8\text{ N.kg}^{-1}$ ، $m = 19\text{ g}$.



<u>أجوبة مختصرة :</u>

1- ب) $v_{lim} = 1.14\text{ m/s}$.

جـ- للحصول على حركة شاقولية انسحابية في نظامين انتقالي و دائم يجب أن يكون الجسم خفيف و ذو حجم كاف لبلوغ السرعة الحدية (الشكل لا يكون انسيابي كي يجعل قوة الإحتكاك معتبرة ، كما يجب أن يكون ذو كثافة عالية) .

د) $a_0 = 8.77\text{ m/s}^2$.

2- ب) $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g(1 - \frac{\rho V}{m})$ ، $A = \frac{k}{m}$ ، $C = g$.

جـ) $\Pi = 1.96 . 10^{-2}\text{ N}$ ، $k = \frac{mg - \Pi}{v_{lim}} = 0.15$

<u>التمرين (7) :</u> <u>(بكالوريا 2011 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 26 على الموقع)</u>

يدور كوكب القمر حول الأرض وفق مسار نعتبره دائريا مركزه هو مركز الأرض ، و نصف قطره $r = 384 . 10^3\text{ km}$ و دوره $T_L = 25.5\text{ jour}$.

1- أ- ما هو المرجع الذي تنسب إليه حركة كوكب القمر ؟

ب- احسب قيمة السرعة v لحركة مركز عطالة القمر .

2- المركبة الفضائية أبولو (Apollo) التي حملت رواد الفضاء إلى سطح القمر سنة 1968 ، حلقت في مدار دائري حول القمر على ارتفاع ثابت $h_A = 110\text{ km}$.

أ- ذكر بنص القانون الثالث لكبلر .

ب- اوجد عبارة دور المركبة T_A بدلالة h_A و نصف قطر القمر R_L و كتلته M_L ، و ثابت الجذب العام G . احسب قيمته العددية .

3- استنتج مما تقدم نصف القطر r_S للمدار الجيومستقر لقمر اصطناعي أرضي .

المعطيات : $G = 6.67 . 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$ ، كتلة القمر : $M_L = 7.34 . 10^{22}\ kg$ ،

نصف قطر القمر : $R_L = 1.74 . 10^3\ km$ ، النسبة $\frac{M_T}{M_L} = 81.3$ حيث M_T كتلة الأرض .

4- يوجد تشابه واضح بين النظامين الكوكبي و الذري ، إلا أنه لا يمكن تطبيق قوانين نيوتن على النظام الذري . بين محدودية قوانين نيوتن .

أجوبة مختصرة :

1- أ) المرجع الذي تنسب إليه حركة كوكب القمر هو المرجع الجيومركزي (المركزي الأرضي) .

ب) $v = \frac{2\pi r}{T} = 1.10.10^3\ m/s$.

2- أ) " مربع دور كوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن مركز الشمس "

ب) $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_L + h_A)^3}{G.M_L}} = 7141.77\ s = 1.98\ h$

3) $r^3 = \frac{T^2.G.M_T}{4\pi^2} = 4.22.10^7\ m = 4.22.10^4\ km$ ، علما أن : $\frac{M_T}{M_L} = 81.3$ يكون : $M_T = 81.3\ M_L$

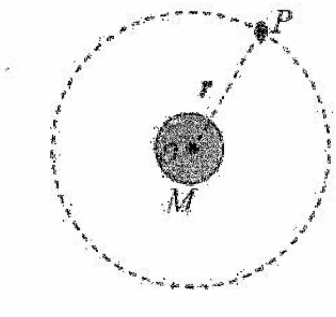
التمرين (8) : (بكالوريا 2012 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 27 على الموقع)

يتصور العلماء في الرحلات المستقبلية نحو كوكب المريخ M وضع محطة لأجهزة الاتصالات مع الأرض على أحد أقمار هذا الكوكب ، مثلا على القمر فوبوس Phobos (P) .

المعطيات : - ثابت التجاذب الكوني : $G = 6.67 . 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.

- المسافة بين المريخ M و القمر P : $r = 9.38 . 10^3\ km$.
- كتلة المريخ : $m_M = 6.44 . 10^{23}\ kg$ و كتلة Phobos : m_P .
- دور حركة دوران المريخ M حول نفسه : $T_M = 24\ h\ 37\ min\ 22\ s$.

نفرض أن هذه الأجسام كروية الشكل و كتلتها موزعة بانتظام على حجومها و أن حركة هذا القمر دائرية و تنسب إلى مرجع غاليلي مبدؤه O مركز كوكب المريخ (الشكل-3) .



الشكل -3

1- مثل على (الشكل-3) القوة التي يطبقها الكوكب M على القمر فوبوس P .

2- أ- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن حركة مركز عطالة هذا القمر دائرية منتظمة .

ب- استنتج عبارة سرعة دوران القمر P حول المريخ .

3- جد عبارة دور حركة القمر T_P حول المريخ بدلالة المقادير r ، G ، m_M .

4- اذكر نص القانون الثالث لكبلر و بين أن النسبة :

$\frac{T_P^2}{r^3} = 9.21.10^{-13}\ s^2.m^{-3}$ ، ثم استنتج قيمة T_P

5- أين يجب وضع محطة الاتصالات S لتكون مستقرة بالنسبة للمريخ ؟ ما قيمة T_S دور المحطة في مدارها حينئذ .

أجوبة مختصرة :

1) بتحليل العلاقة الشعاعية الناتجة عن تطبيق القانون الثاني لنيوتن وفق المحور المماسي ، نجد :

$$0 = m_P\, a_t \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad v = C^{te}$$

2- أ) بما أن المسار دائري و السرعة ثابتة تكون طبيعة حركة مركز عطالة القمر P حول المريخ دائرية منتظمة .

ب) $v = \sqrt{\frac{G\, m_M}{r}}$ ، 3) $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G\, m_M}}$

4) " إن مربع دور كوكب يتناسب طرديا مع البعد المتوسط للكوكب عن الشمس " ،

$$\frac{T_P{}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{6.67.10^{-11}.6.44.10^{23}} \quad 9.21.10^{-13}$$

- قيمة T_P : $T_P = \sqrt{9.21.10^{-13}\, r^3} = 2.76.10^4\ s = 7.66\ h = 7\ h\ ,39\ min$

5- موضع محطة الاتصالات S لتكون مستقرة بالنسبة للمريخ :

لكي يكون قمر اصطناعي (S) ثابتا بالنسبة لمحطة في المريخ يجب أن يتواجد مركز المريخ في مستوي المسار الذي يكون عمودي على محور دوران المريخ و يكون القمر الاصطناعي في المستوي الاستوائي للمريخ .

- قيمة الدور T_S :

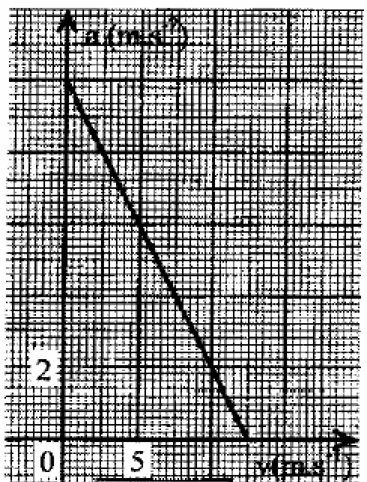
$$T_S = T_M = 24\ h\ ,\ 37\ mi\ ,\ 22\ s$$

التمرين (9) : (بكالوريا 2009 – علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 06 على الموقع)

يسقط مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100\ kg$ سقوطا شاقوليا بدءا من نقطة O بالنسبة لمعلم أرضي دون سرعة ابتدائية .

يخضع أثناء سقوطه إلى قوة مقاومة الهواء عبارتها من الشكل $f = k\,v$ (تهمل دافعة أرخميدس) .

يمثل البيان الشكل-2- تغيرات (a) تسارع مركز عطالة المظلي بدلالة السرعة (v)



الشكل 2

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن المعادلة التفاضلية لحركة المظلي من الشكل : $\frac{dv}{dt} = A\,v + B$. حيث أن A ، B ثابتان يطلب تعيين عبارتيهما .

2- عين بيانيا قيمتي :

- شدة مجال الجاذبية الأرضية (g) ، السرعة الحدية للمظلي (v_ℓ) .

3- تتميز الحركة السابقة بقيمة المقدار $(\frac{k}{m})$ ، حدد وحدة هذا المقدار . و أحسب قيمته من البيان .

4- أحسب قيمة k .

5- مثل كيفيا تغيرات سرعة المظلي بدلالة الزمن في المجال الزمني $0 \le t \le 7\ s$

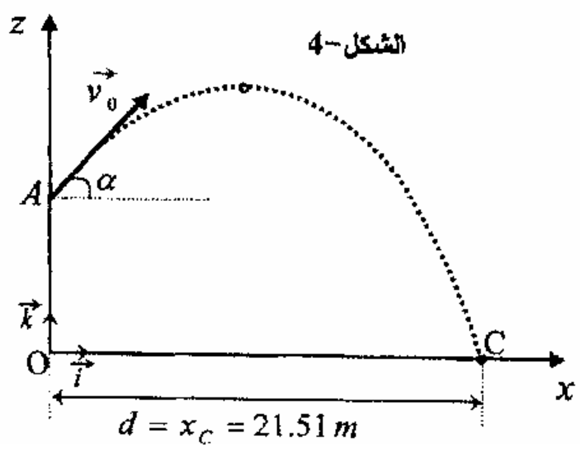
التمرين (10) : (بكالوريا 2012 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 15 على الموقع)

خلال منافسة رمي الجلة في الألعاب الأولمبية ببكين ، حقق الرياضي الذي فاز بهذه المنافسة النتيجة $d = 21.51\ m$ اعتمادا على الفيلم المسجل لعملية الرمي و لأجل معرفة السرعة v_0 التي قذفت بها الجلة ، تم استخراج بعض المعطيات أثناء لحظة الرمي :

قذفت الجلة من النقطة A الواقعة على ارتفاع $h_A = 2.00\ m$ بالنسبة لسطح الأرض و بالسرعة $\vec{v}_0$ التي تصنع الزاوية $\alpha = 45°$ مع الخط الأفقي (الشكل-4) .

ندرس حركة الجلة في المعلم المتعامد و المتجانس $(o, \vec{i}, \vec{k})$ و نختار اللحظة الابتدائية $t = 0$ هي اللحظة التي يتم فيها قذف الجلة من النقطة A .

نهمل احتكاكات الجلة مع الهواء و دافعة أرخميدس بالنسبة لقوة ثقل الجلة .



1- جد المعادلتين $x = f(t)$ و $z = h(t)$ المميزتين لحركة الجلة في المعلم المختار ، ثم استنتج معادلة مسار الجلة $z = g(x)$ بدلالة المقادير h_A ، α ، g و v_0 .

2- جد معادلة السرعة الابتدائية v_0 بدلالة h_A ، α ، g و d ، ثم احسب قيمتها .

3- جد المدة الزمنية التي تستغرقها الجلة في الهواء .

تعطى : $g = 9.8\ m.s^{-2}$.

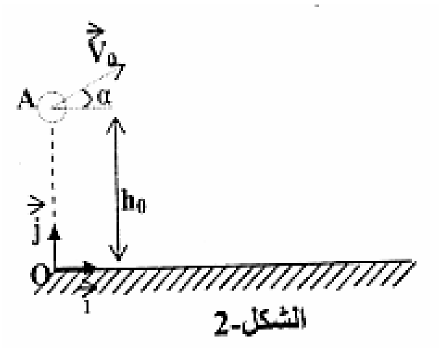
أجوبة مختصرة :

1) $x = v_0 \cos\alpha\, t$ ، $z = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h_A$ ، $z = -\frac{g}{2{v_0}^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\, x + h_A$

2) $v_0 = \sqrt{\dfrac{g.d^2}{2\cos\alpha^2(\tan\alpha.d + h_A)}} = 13.89\ m/s$ ، 3) $t_C = \dfrac{d}{v_0 \cos\alpha} = 2.2\ s$.

التمرين (11) : (بكالوريا 2008 – علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 04 على الموقع)

في مقابلة لكرة القدم ، خرجت الكرة إلى التماس ، و لإعادتها إلى الميدان ، يقوم أحد اللاعبين برميها من خط التماس بكلتا يديه لتمريرها فوق رأسه .



الشكل-2

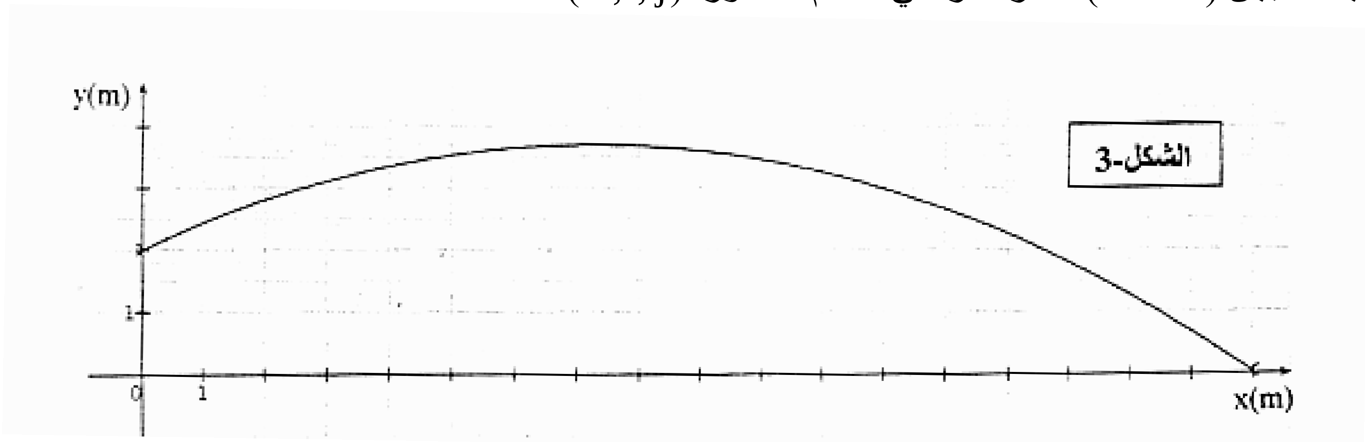
لدراسة حركة الكرة ، نهمل تأثير الهواء و ننمذج الكرة بنقطة مادية .

في اللحظة $(t = 0)$ تغادر الكرة يدي اللاعب في النقطة A تقع على ارتفاع $h_0 = 2\ m$ من سطح الأرض بسرعة $(\vec{v}_0)$ يصنع حاملها مع الأفق و إلى الأعلى زاوية $\alpha = 25°$ (الشكل-2) . تمر الكرة فوق رأس الخصم ، الذي طول قامته $h = 1.80\ m$ و الواقف على بعد $12\ m$ من اللاعب الذي يرمي الكرة .

1- بين أن معادلة مسار الكرة في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = \left(-\frac{g}{2\,v_0^2 \cos\alpha^2}\right) x^2 + x\tan\alpha + y_0$$

2- يمثل البيان (الشكل-3) مسار الكرة في المعلم المذكور $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



باستغلال المنحنى البياني أجب عما يلي :

أ) على أي ارتفاع (h_2) من رأس الخصم تمر الكرة ؟

ب) ما قيمة السرعة الابتدائية (v_0) التي أعطيت للكرة لحظة مغادرتها يدي اللاعب ؟

جـ) حدد الموضع M للكرة في اللحظة $(t = 1.17\ s)$. وما قيمة سرعتها عندئذ ؟

د) أحسب الزمن الذي تستغرقه الكرة من لحظة انطلاقها إلى غاية ارتطامها (اصطدامها) بالأرض .

المعطيات : $g = 10\ m/s^2$ ، $\sin\alpha = 0.4226$ ، $\cos\alpha = 0.9063$ ، $\tan\alpha = 0.4663$.

أجوبة مختصرة :

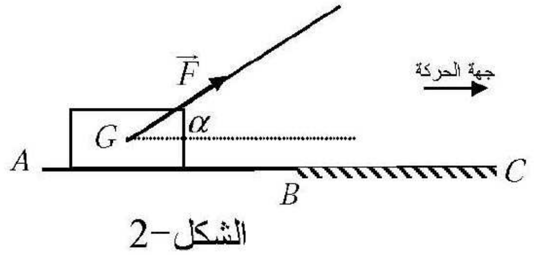
1) $y = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\ x + h_0$ ، 2- أ) $h_2 = 1.2\ m$ ، ب) $v_0 = 13.8\ m/s$

جـ) $(x_M = 14.6\ m\ ,\ y_M = 2\ m)$ ، $v_M = 13.8\ m/s$ ، د) $t_P = 1.44\ s$

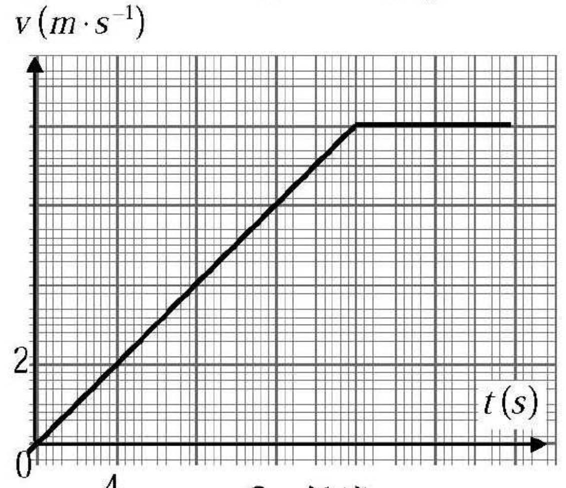
التمرين (12) : (بكالوريا 2013 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 17 على الموقع)

يجر حمزة صندوقا كتلته: $m=10kg$ على طريق مستقيم أفقي (AC)، مركز عطالته G بقوة $\vec{F}$ ثابتة حاملها يصنع زاوية: $\alpha=30°$ مع المستوى الأفقي، حيث الجزء (AB) أملس، والجزء (BC) خشن (الشكل-2).

التمثيل البياني (الشكل-3) يمثل تغيرات سرعة G بدلالة الزمن t.



الشكل-2



الشكل-3

1- أ- استنتج بيانيا طبيعة الحركة والتسارع لـ G لكل مرحلة.

ب- استنتج المسافة المقطوعة AC.

2- أ- اكتب نص القانون الثاني لنيوتن.

ب- جِدْ عبارة شدة قوة الجر $\vec{F}$، ثمّ احسبها.

جـ- جِدْ عبارة شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$، ثمّ احسبها.

د- فسّر لماذا يمكن للسرعة أن تصبح ثابتة في المرحلة الأخيرة.

أجوبة مختصرة :

1- أ) الطور الأول : حركة مستقيمة متسارعة بانتظام ، $a_1 = 0.5\ m/s^2$ ، الطور الثاني : حركة مستقيمة منتظمة $a_2 = 0$ ، ب) $AC = 128\ m$ ، 2- أ) نص قانون نيوتن الثاني : في مرجع غاليلي المجموع الشعاعي للقوة الخارجية المؤثرة على مركز عطالة جملة ميكانيكية في لحظة ما ، مساوي لجداء لكتلة هذه الجملة في شعاع تسارعها عند هذه اللحظة ، ب) $F = \dfrac{m.a_1}{\cos\alpha} = 5.77\ N$ ، جـ) $f = F.\cos\alpha = 5\ N$.

التمرين (13) : (بكالوريا 2012 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 16 على الموقع)

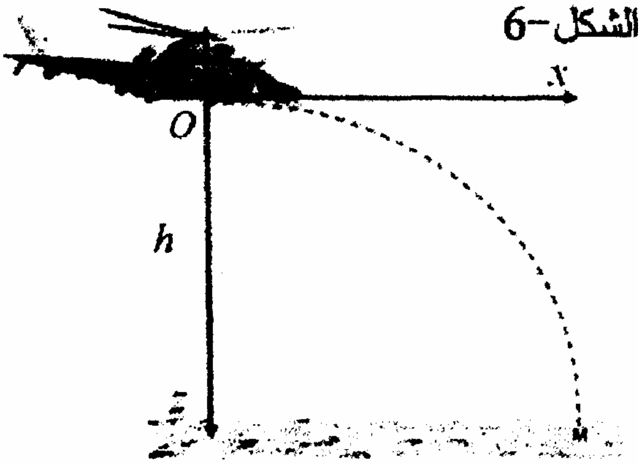
في فبراير 2012 ، هبت عاصفة ثلجية على شمال شرق الجزائر ، فاستعملت الطائرات المروحية للجيش الوطني الشعبي لإيصال المساعدات للمتضررين خاصة في المناطق الجبلية منها .

أولا :

تطير المروحية على ارتفاع ثابت h من سطح الأرض بسرعة أفقية ثابتة قيمتها $v_0 = 50\ m.s^{-1}$.

يُترك صندوق مواد غذائية مركز عطالته G يسقط في اللحظة $t = 0$ انطلاقا من النقطة O مبدأ الإحداثيات و بالسرعة الابتدائية الأفقية $\vec{v}_0$ ليرتطم بسطح الأرض في النقطة M (الشكل-6) .

ندرس حركة G في المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المرتبط بسطح الأرض الذي نعتبره غاليليا ، نهمل أبعاد الصندوق و تؤثر عليه قوة وحيدة هي قوة ثقله .



الشكل-6

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن جد :

أ- المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $z(t)$.

ب- معادلة المسار $z(x)$.

جـ- إحداثيتي نقطة السقوط M .

د- الزمن اللازم لوصول الصندوق إلى الأرض .

ثانيا :

لكي لا تتلف المواد الغذائية عند الارتطام بسطح الأرض ، تم ربط الصندوق بمظلة تمكنه من النزول شاقوليا ببطء . تبقى المروحية على نفس الارتفاع h السابق في النقطة O ، ليترك الصندوق يسقط شاقوليا دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ (الشكل-7) . يخضع الصندوق لقوة احتكاك الهواء نعبر عنها بالعلاقة $\vec{f} = -100 \times \vec{v}$.

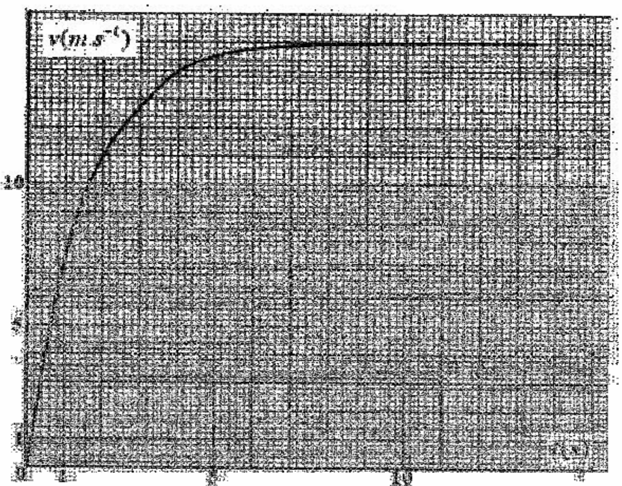
حيث : $\vec{v}$ يمثل شعاع سرعة الصندوق في اللحظة t مع إهمال دافعة أرخميدس خلال السقوط .

1- جد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عطالة الصندوق .

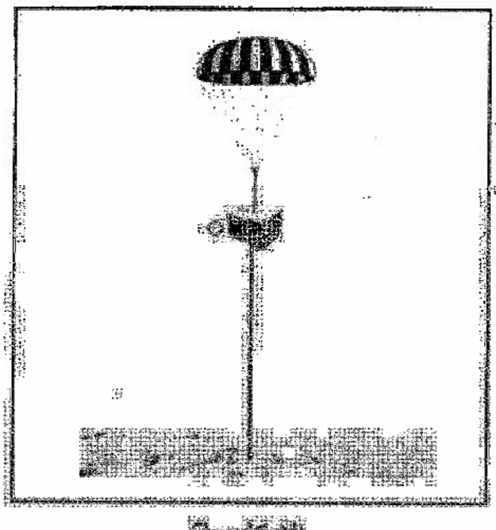
2- يمثل (الشكل-8) تطور v سرعة مركز عطالة الصندوق بدلالة الزمن t .

أ- جد السرعة الحدية v_ℓ .

ب- حدد قيمتي السرعة و التسارع في اللحظتين : $t = 0\ s$ و $t = 10\ s$.



الشكل-8



الشكل-7

يعطى : $g = 9.8\ m.s^{-2}$ ، $h = 405\ m$ ، كتلة الصندوق و المظلة $m = 150\ kg$.

أجوبة مختصرة :

أولا :

1- أ) $x = v_0\, t$ ، $z = \frac{1}{2} g\, t^2$ ، ب) $z = \frac{g}{2v_0^{\,2}} x^2$ ، جـ) $x_M = \sqrt{\frac{2\,h\,v_0^{\,2}}{g}} = 454\ \text{m}$ ، $z_M = 405\ \text{m}$

ثانيا :

1) $\frac{dv}{dt} = g - \frac{2}{3} v$ ، 2- أ) $v_\ell = 15\ \text{m/s}$

ب) $t = 0 \rightarrow v = 0$ ، $t = 10\ \text{s} \rightarrow v = 15\ \text{m/s}$

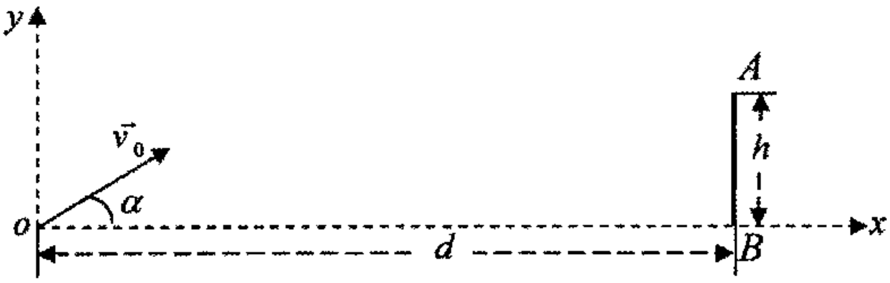
$t = 0 \rightarrow \tan\alpha = 9.85 \rightarrow a = 9.8$ ، $t = 0 \rightarrow \tan\alpha = 0 \rightarrow a = 0$

التمرين (14) : (بكالوريا 2010 – علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 23 على الموقع)

تؤخذ $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$ ، مقاومة الهواء و دافعة أرخميدس مهملتان .

لتنفيذ مخالفة خلال مباراة في كرة القدم ، وضع اللاعب الكرة في النقطة O مكان وقوع الخطأ (نعتبر الكرة نقطية) على بعد $d = 25\ \text{m}$ من خط المرمى ، حيث ارتفاع العارضة الأفقية $h = AB = 2.44\ \text{m}$.

يقذف اللاعب الكرة بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ يصنع حاملها مع الأفق زاوية $\alpha = 30°$ (الشكل-3) .



الشكل-3

1/ أدرس طبيعة حركة الكرة في المعلم $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy})$ بأخذ مبدأ الأزمنة لحظة القذف ، استنتج معادلة المسار $y = f(x)$

2/ كم يجب أن تكون قيمة v_0 حتى يسجل الهدف مماسيا للعارضة الأفقية (النقطة A) ؟ ما هي المدة الزمنية المستغرقة ؟ و ما هي قيمة سرعتها عند (النقطة A) ؟

3/ كم يجب أن تكون قيمة v_0 حتى يسجل الهدف مماسيا لخط المرمى (النقطة B) ؟

أجوبة مختصرة :

1) - مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .

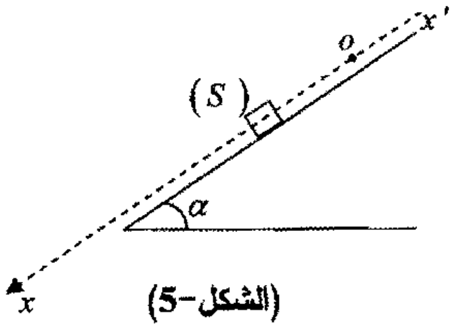
- مسقط حركة الكرة على المحور oy هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

▪ معادلة المسار : $y = -\frac{g}{2v_0^{\,2}\cos\alpha^2} x^2 + \tan\alpha\; x$

2) $v_0 = 18.6\ \text{m/s}$ ، $t_A = 1.55\ \text{s}$ ، $v_A = 17.25\ \text{m/s}$ ، 3) $v_0 = 17\ \text{m/s}$

التمرين (15) : (بكالوريا 2010 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 24 على الموقع)

ينزلق جسم صلب (S) كتلته $m = 100\ g$ على طول مستو مائل عن الأفق بزاوية $\alpha = 20°$ وفق المحور $\overrightarrow{xx'}$ (الشكل-5) .
قمنا بالتصوير المتعاقب بكاميرا رقمية (Webcam) ، و علوج شريط الفيديو برمجية "Aviméca" بجهاز الإعلام الآلي و تحصلنا على النتائج التالية :



(الشكل-5)

t(s)	0.00	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
$v(m.s^{-1})$	v_0	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32

1/ أرسم البيان $v = f(t)$.
2/ باعتماد على البيان :
أ/ بين طبيعة حركة (S) و استنتج القيمة التجريبية للتسارع a .
ب/ استنتج قيمة السرعة v_0 في اللحظة $t = 0$.
جـ/ احسب المسافة المقطوعة بين اللحظتين : $t_1 = 0.04\ s$ و $t_2 = 0.08\ s$.
3/ بفرض أن الاحتكاكات مهملة :
أ/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد العبارة الحرفية للتسارع a_0 ثم أحسب قيمته .
ب/ قارن بين a_0 و a . كيف تبرر الاختلاف ؟
4/ أوجد شدة القوة $\vec{f}$ المنمذجة للاحتكاكات على طول المستوي المائل .
يعطى : $g = 10\ m.s^{-2}$ ، $\sin 20° = 0.34$.

أجوبة مختصرة :

2- أ) البيان $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ و حيث أن السرعة تتزايد ، فالحركة إذن مستقيمة متغيرة بانتظام ، $a = 2\ m/s^2$

ب) بتمديد المنحنى البياني نجد: $v_0 = 0.08\ m/s$ ، جـ) $d = S = 8.10^{-3}\ m$

3) $a_0 = g \sin\alpha = 3.4\ m/s^2$ ، نلاحظ أن $a_0 > a$ ، و هذا راجع إلى إهمال قوى الاحتكاك في الدارسة النظرية و التي لا تهمل في الدراسة التجريبية التي نتج عنها الجدول السابق .

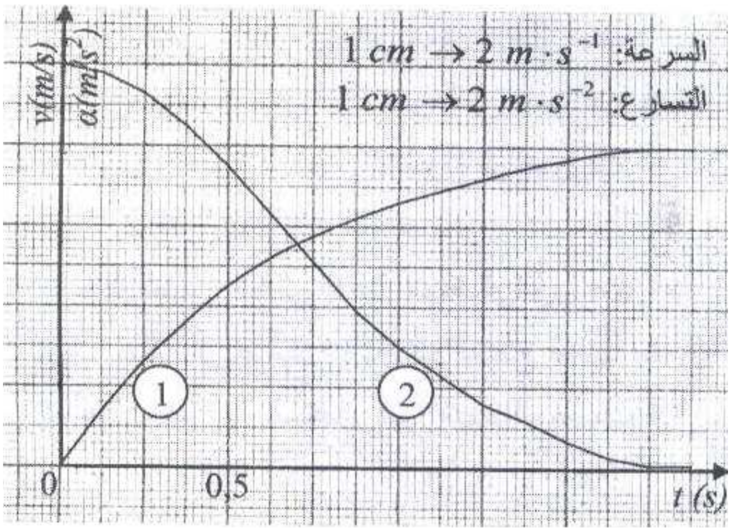
4) $f = m(g \sin\alpha - a) = 0.14\ N$

التمرين (16) : (بكالوريا 2011 - علوم تجريبية) ((الحل المفصل : تمرين مقترح 25 على الموقع)

أثناء حصة الأعمال التطبيقية ، اقترح الأستاذ على تلامذته دراسة سقوط كرية مطاطية شاقوليا في الهواء دون سرعة ابتدائية $v_0 = 0\ m.s^{-1}$ و نمذجة السقوط بطريقة رقمية .

المعطيات : كتلة الكرية $m = 3\ g$ ، نصف قطرها $r = 1.5\ cm$ ، الكتلة الحجمية للهواء $\rho_{air} = 1.5\ kg.m^{-3}$.

حجم الكرة : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، قوة الاحتكاك $f = k v^2$ ، $g = 9.8\ m.s^{-2}$.



المطلوب :

1- مثل القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الكرية خلال مراحل السقوط .

2- باختيار مرجع دراسة مناسب نعتبره غاليليا ، و بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الكرية . اكتب المعادلة التفاضلية للسرعة .

3- سمحت كاميرا رقمية بمتابعة حركة الكرية و عولج شريط الصور الملتقطة ببرمجية مكنتنا من الحصول على البيانين $a = h(t)$ و $v = f(t)$.

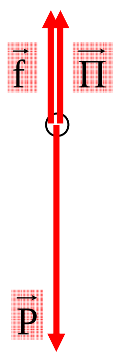
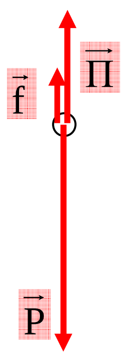
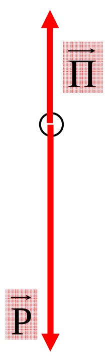
أ- أي المنحنيين يمثل تطور التسارع $a(t)$ بدلالة الزمن ؟ علل .

ب- حدد بيانيا السرعة الحدية v_ℓ .

جـ- علما أن : $v_\ell = \sqrt{\frac{g}{k}(m - \rho_{air} V)}$. أحسب قيمة معامل الاحتكاك k .

أجوبة مختصرة :

1- تمثيل القوى الخارجية خلال مراحل السقوط :

مرحلة النظام الدائم	المرحلة الانتقالية	مرحلة الانطلاق
$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\sum \vec{F} \neq \vec{0}$	$\sum \vec{F} \neq \vec{0}$
		

$$m\frac{dV}{dt} + k\,v^2 = g(m - \rho_{air} V) \quad (2$$

3- أ) بما أن الكرية تركت عند اللحظة $t = 0$ بدون سرعة ابتدائية أي $(t = 0 \rightarrow v = 0)$ يكون البيان (1) موافق لتطور السرعة و البيان (2) موافق لتطور التسارع .

ب) $v_\ell = 8\ m/s$ ، جـ) $k = \frac{g}{v_\ell^2}(m - \rho_{air} V) = 4.56.10^{-4}\ kg/s$

التمرين (17) : (بكالوريا 2013 - علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 28 على الموقع)

تسقط حبة برد كروية الشكل، قطرها: $D = 3cm$ ، كتلتها: $m = 13g$ ، دون سرعة ابتدائية في اللحظة: $t = 0$ من نقطة O ترتفع بـــ $1500m$ عن سطح الأرض نعتبرها كمبدأ للمحور الشاقولي (Oz) .

أولا: نفرض أن حبة البرد تسقط سقوطا حرا.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِدْ المعادلتين الزمنيتين لسرعة وموضع G مركز عطالتها.

2- احسب قيمة السرعة لحظة وصولها إلى سطح الأرض.

ثانيا: في الواقع تخضع حبة البرد بالإضافة لقوة ثقلها $\vec{P}$ إلى قوة دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ وقوة احتكاك $\vec{f}$ المتناسبة طردا مع مربع السرعة، حيث: $f = kv^2$.

1- بالتحليل البُعدي حدّد وحدة المعامل k في النظام الدولي للوحدات.

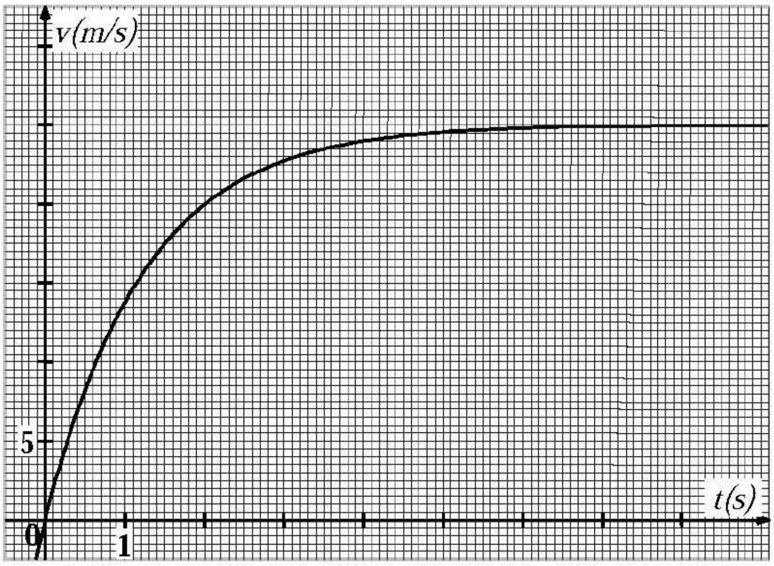
2- اكتب عبارة قوة دافعة أرخميدس، ثمّ احسب شدتها وقارنها مع شدة قوة الثقل. ماذا تستنتج؟

3- بإهمال قوة دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$:

أ- جِدْ المعادلة التفاضلية للحركة، ثمّ بيّن أنه يمكن كتابتها على الشكل: $\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v^2$

ب- استنتج العبارة الحرفية للسرعة الحدية v_ℓ التي تبلغها حبة البرد.

جـ- جِدْ بيانيا قيمة v_ℓ السرعة الحدية، ثمّ استنتج قيمة k.



الشكل-4

د- قارن بين السرعتين التي تم حسابهما في السؤالين(أولا-2) و(ثانيا-3-جـ). ماذا تستنتج؟

المعطيات: حجم الكرة: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، الكتلة الحجمية للهواء: $\rho = 1,3\ kg \cdot m^{-3}$، $g = 9,8\ m \cdot s^{-2}$.

أجوبة مختصرة :

أولا : 1) $v = gt$ ، $x = \frac{1}{2}g\,t^2$ ، 2) $v = 171.5$ m/s .

ثانيا :

1) وحدة k هي : kg/s ، 2) $\Pi = \frac{\rho.\pi.D^3.g}{6} = 1.8.10^{-4}$ N ، دافعة أرخميدس مهملة أمام قوة الثقل .

3- أ) $A = g$ ، $B = \frac{k}{m}$ ، ب) $v_\ell = \sqrt{\frac{g.m}{k}}$ ، جـ) $v_\ell = 25$ m/s ، $k = 2.0\ .\ 10^{-4}$ kg/m .

د) نستنتج أن تأثير الهواء معتبر على سرعة المتحرك في السقوط الحقيقي .

التمرين (18) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 21 على الموقع)

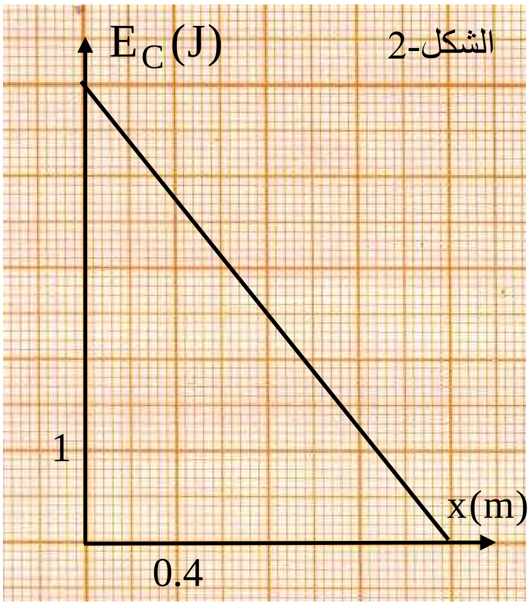
عند اللحظة $t = 0$ و من نقطة (o) نعتبرها مبدأ الاحداثيات ، نقذف جسما نقطيا (S) كتلته $m = 400\ g$ بسرعة ابتدائية v_0 ، فينسحب على مستوي مائل عن الأفق بزاوية $\alpha = 30°$ (الشكل-1) ، يخضع الجسم (S) أثناء حركته إلى قوى الاحتكاك تكافئ قوة $\vec{f}$ ثابتة الشدة معاكسة لجهة الحركة . يعطى : $g = 10\ m/s^2$.

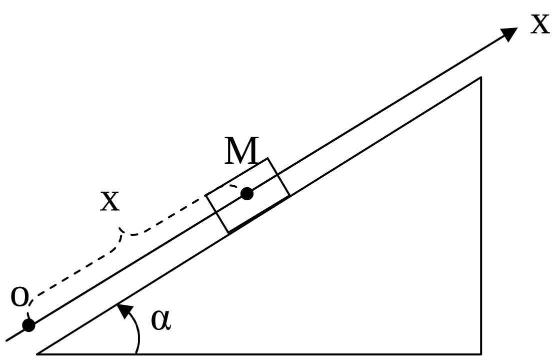
1- بتطبيق مبدأ إنحفاظ الطاقة على الجملة جسم (S) بين اللحظة $t = 0$ و لحظة مروره من موضع كيفي M تكون عنده الفاصلة x ، و الطاقة الحركية E_C ، اثبت أن :

$$E_C = -(m.g.\sin\alpha + f)\,x + E_{C0}$$

حيث : E_{C0} هي الطاقة الحركية لحظة قذف (S) .

2- نقيس E_C عند أوضاع مختلفة فاصلتها x فنحصل على المنحنى البياني $E_C = f(x)$ كما في (الشكل-2) .





أ- أكتب العلاقة الرياضية بين E_C و x .

ب- بمطابقة هذه العلاقة الرياضية بالعلاقة النظرية السابقة ، استنتج قيمة السرعة الابتدائية v_0 و شدة قوة الاحتكاك f .

3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أدرس طبيعة حركة الجسم (S) ثم أحسب قيمة تسارعه .

4- أكتب المعادلات الزمنية للحركة $v(t)$ ، $x(t)$.

أجوبة مختصرة :

2- أ) $E_C = Ax + B$ ، حيث $A = -.5$ هو ميل المنحنى (المستقيم) ، $B = 5$ قيمة E_C من أجل $x = 0$.

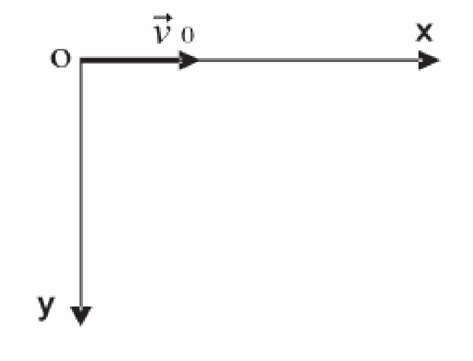
ب) $v_0 = \sqrt{\frac{2B}{m}} = 5\ m/s$ ، $f = -A - m.g.\sin\alpha = 0.5\ N$

3) $a = \frac{-m.g.\sin\alpha - f}{m} = -6.25\ m/s^2$ ، طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

4) $v = at + v_0$ ، $x = \frac{1}{2}a\,t + v_0 t$

التمرين (19) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 32 على الموقع)

تدفع كرة كتلها m نعتبرها نقطة مادية مركز عطالتها G على طاولة أفقية ، عند وصولها حافة الطاولة تندفع في الهواء بسرعة أفقية $\vec{v}_0$.



نعتبر مبدأ الفواصل O و الأزمنة t =0 لحظة تحرر الكرة من الطاولة .

1- ما هو المرجع المناسب لدراسة حركة الكرة ؟

2- اعتمادا على القانون الثاني لنيوتن :

أ- عين طبيعة مسقط حركة الكرة وفق المحورين (ox) و (oy) .

ب- أوجد المعادلتين الزمنيتين للحركة x(t) ، y(t) ، ثم استنتج معادلة المسار .

3- تم التصوير المتعاقب خلال مجالات زمنية نفسها $\tau = 40$ ms لحركة الكرة عند تحررها من الطاولة ، عولجت الصور ببرمجية مناسبة و تحصلنا على النتائج التالية :

t (ms)	0	40	80	120	160	200
x (m)	0	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
y (m)	0	0.008	0.032	0.072	0.128	0.200

أ- أرسم المنحنى البياني لكل من : x(t) و $y(x^2)$.

ب- استنتج من البيانين السابقين :

- قيمة السرعة الابتدائية v_0 .
- قيمة الجاذبية g .

أجوبة مختصرة :

1) المرجع المناسب لدراسة الحركة ، هو المرجع السطحي الأرضي نعتبره غاليلي (مرجع المخبر) .

2- أ) - مسقط حركة الكرة على المحور ox هي حركة مستقيمة منتظمة .

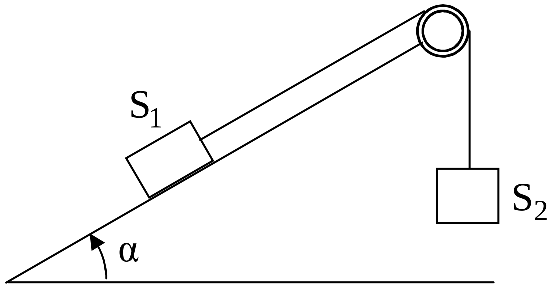
- مسقط حركة الكرة على المحور oy هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

ب) $x = v_0 t$ ، $y = \frac{1}{2} g\, t^2$.

3- أ) اعتمادا على المنحنى x(t) و بالمطابقة بين العلاقتين البيانية و النظرية نجد : $v_0 = 5$ m/s ، و من المنحنى $y(x^2)$ و بنفس الطريقة نجد : $g = 10$ m/s^2 .

التمرين (20) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 33 على الموقع)

لتكن الجملة الميكانيكية المبينة في الشكل المقابل ، و المتكونة من بكرة مهملة الكتلة ، خيط عديم الإمتطاط و مهمل الكتلة أيضا ، جسمين صلبين (S_1) ، (S_2) نعتبرهما نقطيين ، كتلتهما $m_1 = 600$ g ، $m_2 = 400$ g على الترتيب .
في اللحظة t = 0 و من نقطة O نعتبرها مبدأ للفواصل ينطلق الجسم (S_2) من السكون و يجر معه الجسم (S_1) الذي يتحرك على مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30°$.



1- مثل القوى المؤثرة على كل من (S_1) ، (S_2) .
2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن تسارع كل من (S_1) ، (S_2) يعطى بالعلاقة التالية :

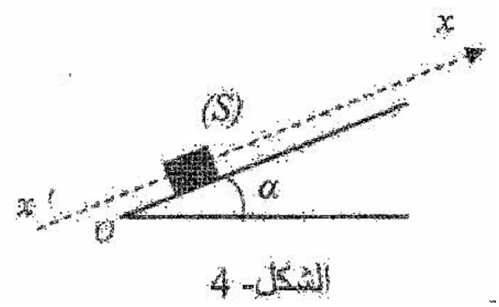
$$a = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

3- عند اللحظة $t_1 = 0.5\ s$ يقطع الجسم (S_2) مسافة شاقولية x_1 و تكون عنده الطاقة الحركية هي E_{C1} .
أحسب x_1 ثم E_{C1} .
4-أ- كيف تصبح حركة الجسم S_2 بعد انقطاع الخيط في اللحظة t_1 .
ب- أحسب لحظة وصول الجسم (S_2) إلى الأرض علما أنه في اللحظة t_1 كان على ارتفاع $h = 0.875\ m$ من سطح الأرض .
يعطى : $g = 10\ m/s^2$.

<u>أجوبة مختصرة :</u>

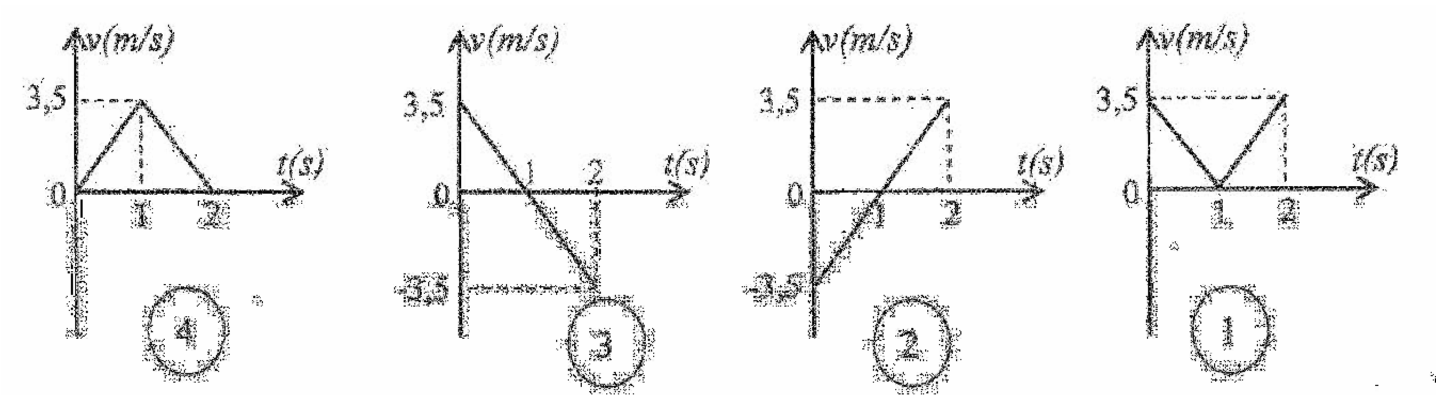
3) $x_1 = 0.125\ m$ ، $E_{C1} = 0.05\ J$.
4- أ) بعد انقطاع الخيط تصبح عبارة التسارع : $a = g$ و منه الحركة تصبح مستقيمة متغيرة بانتظام ،
ب) $t = 0.37\ s$.

<u>التمرين (21) :</u> <u>(بكالوريا 2012 - رياضيات)</u> <u>(الحل المفصل : تمرين مقترح 39 على الموقع)</u>



الشكل- 4

1- لغرض حساب زاوية الميل α لمستو يميل على الأفق . قام فوج من التلاميذ بقذف جسم صلب (S) كتلته $m = 1\ kg$ في اللحظة $t = 0$ من النقطة O بسرعة $\vec{v}_0$ نحو الأعلى وفق خط الميل الأعظم لمستو أملس (الشكل-4) .
باستعمال تجهيز مناسب تمكن التلاميذ من دراسة حركة مركز عطالة (S) و الحصول على أحد مخططات السرعة $v = f(t)$ التالية :



أ- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، ادرس حركة الجسم (S) بعد لحظة قذفه من O .

ب- من بين المخططات الأربعة (1) ، (2) ، (3) ، (4) ، ما هو المخطط الموافق لحركة الجسم (S) برر .

جـ- احسب قيمة الزاوية α .

د- احسب المسافة المقطوعة بين اللحظتين : $t = 0$ و $t = 2s$.

2- في الحقيقة يخضع الجسم أثناء انزلاقه على المستوي المائل إلى قوة احتكاك شدتها ثابتة f .

أ- أحص و مثل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم (S) .

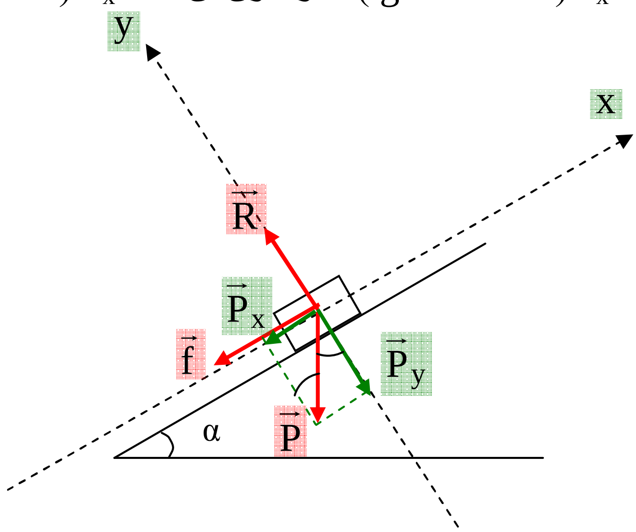
ب- ادرس حركة مركز عطالة (S) ، ثم استنتج العبارة الحرفية لتسارع حركته .

جـ- احسب قيمة التسارع من أجل $f = 1.8$ N .

تعطى : $g = 9.8\ m.s^{-2}$.

أجوبة مختصرة :

1- أ) $a_x = - g \sin\alpha$ ، نلاحظ أن التسارع ثابت و كذلك $a_x < 0$ ($g \sin\alpha < 0$) ، و كون أن $v_x > 0$ ($\vec{v}$ في جهة المحور ox) يكون : $a_x . v_x < 0$ ، و بما أن المسار مستقيم تكون حركة مركز عطالة الجسم (S) أثناء صعوده في المستوي المائل مستقيمة متباطئة بانتظام .



ب) - عند وصل الجسم (S) إلى أعلى المستوي المائل أين تنعدم سرعته يعود إلى أسفل المستوي المائل بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام (القوة المؤثرة ثابتة) ، يمكن القول أن حركة الجسم (S) على المستوي المائل لها طورين :

طور I (صعود) : تكون فيه الحركة مستقيمة متباطئة بانتظام .

طور II (نزول) : تكون فيه الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام حيث $v < 0$ (الحركة عكس المحور) ، $a_G < 0$ ($\vec{P}_x$ جهتها معاكسة لجهة المحور) و إذا أخذنا بعين الاعتبار أن ميل المنحنى $v = f(t)$ يمثل ميل المماس فإن هذه المعلومات تطابق البيان (3) ولا تطابق البيانات الأخرى .

جـ) $\sin\alpha = 0.36$ ، $\alpha = 21°$.

د) $d = S_1 + S_2 = 3.5$ m .

2- أ) - يخضع الجسم (S) إلى القوى الخارجية التالية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

ب) $a = - g \sin\alpha - \dfrac{f}{m}$ ، f ، m ، α ، g ثوابت ، لذلك فإن قيمة التسارع ثابتة ، و كون أن المسار مستقيم ، تكون حركة مركز عطالة الجسم (S) مستقيمة متغيرة بانتظام .

جـ) $a = - 5.3\ m/s^2$

سلسلة دروس و تمارين في مادة العلوم الفيزيائية- ثالثة ثانوي

إعداد الأستاذ : فرقاني فارس

عرض نظري و تمارين

05

التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الشعب : علوم تجريبية
رياضيات ، تقني رياضي

****

www.sites.google.com/site/faresfergani

السنة الدراسية : 2015/2014

المحتوى المفاهيمي : 09

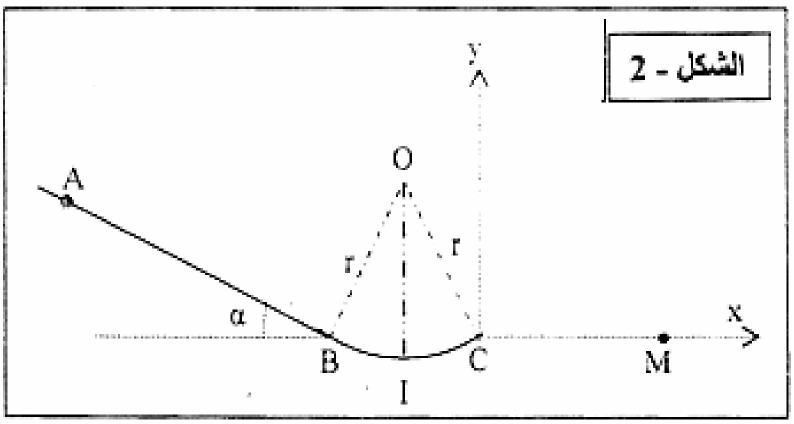
سلسلة تمارين-2 (مستوى 03)

التمرين (1) : (بكالوريا 2008 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 35 على الموقع)

ملاحظة : نهمل تأثير الهواء و كل الاحتكاكات .

يترك جسم نقطي (S) ، دون سرعة ابتدائية من النقطة A لينزلق وفق خط الميل الأعظم AB لمستو مائل يصنع مع الأفق زاوية $\alpha = 30°$. المسافة $(AB = L)$.

يتصل AB مماسيا في النقطة B بمسلك دائري (BC) مركزه (O) و نصف قطره (r) بحيث تكون النقاط A ، B ، C ، O ضمن نفس المستوي الشاقولي و النقطتان B ، C على نفس المستوي الأفقي (الشكل-2) .



يعطى : كتلة الجسم (S) $m = 0.2\ kg$ ، $g = 10\ m/s2$ ، $L = 5\ m$ ، $r = 2\ m$.

1- أوجد عبارة سرعة الجسم (S) عند مروره بالنقطة B بدلالة L ، g ، α ثم أحسب قيمتها .

2- حدد خصائص شعاع السرعة للجسم (S) في النقطة C .

3- أ) أوجد بدلالة m ، g ، α عبارة شدة القوة التي تطبقها الطريق على الجسم (S) خلال انزلاقه على المستوي المائل . أحسب قيمتها .

ب) لتكن I أخفض نقطة من المسار الدائري (BC) . يمر الجسم (S) بالنقطة I بالسرعة $v_1 = 7.37$ m/s . أحسب شدة القوة التي تطبقها الطريق على الجسم (S) عند النقطة I .

4- عند وصول الجسم (S) إلى النقطة C يغادر المسار (BC) ليقفز في الهواء .

أ) أوجد في المعلم $(\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{Cy})$ المعادلة الديكارتية $y = f(x)$ لمسار الجسم (S) . نأخذ مبدأ الأزمنة (t = 0) لحظة مغادرة الجسم النقطة C .

ب) يسقط الجسم (S) على المستوي الأفقي المار بالنقطتين B ، C في النقطة M . أحسب المسافة CM .

<u>أجوبة مختصرة :</u>

1) $v_B = \sqrt{2\,g\,AB\sin\alpha} = 7.07$ m/s .

2) الجهة ← نحو الأعلى ، الحامل ← يعمل الزاوية α مع المحور (ox) حيث α هي زاوية المستوي المائل ، الشدة ← $v_C = v_B = 7.07$ m/s

3- أ) $R = m\,g\cos\alpha = 1.72$ N ، ب) $R = m(\frac{v^2}{R} + g) = 7.43$ N

4- أ) $y = -\frac{g}{2v_0^2\cos\alpha^2}x^2 + \tan\alpha\,x$ ، ب) $CM = x_M = \frac{2\,v_0^2\cos\alpha^2\,.\tan\alpha}{g} = 4.3$ m

<u>التمرين (2) :</u> (بكالوريا 2008 – علوم تجريبية) (الحل المفصل : تمرين مقترح 22 على الموقع)

هذا النص مأخوذ من مذكرات العالم هويجنز سنة 1690 " .. في البداية كنت أضن أن قوة الاحتكاك في مائع (غاز أو سائل) تتناسب طردا مع السرعة ، و لكن التجارب التي حققتها في باريس ، بينت لي أن قوة الاحتكاك ، يمكن أيضا أن تتناسب طردا مع مربع السرعة . و هذا يعني أنه إذا تحرك متحرك بسرعة ضعف ما كان عليه ، يصطدم بكمية مادة من المائع تساوي مرتين و لها سرعة ضعف ما كانت لها .... "

1- يشير النص إلى فرضيتي هويغنز حول قوة الاحتكاك في الموائع ، يعبر عنهما رياضيا بالعلاقتين :

$f = k\,v$................ (1)

$f = k'\,v^2$ .... (2)

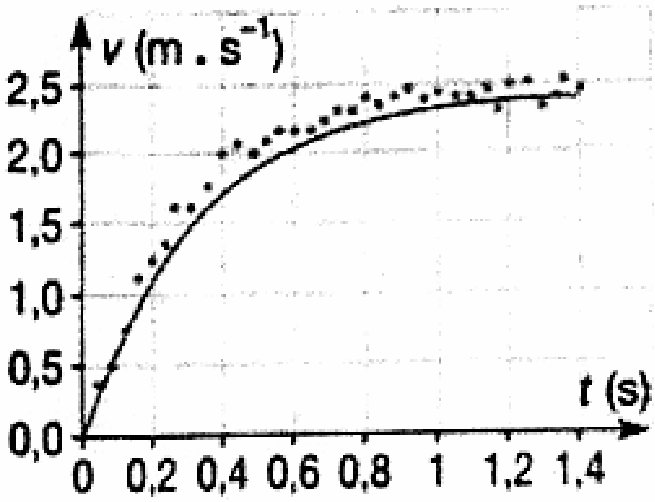
حيث : f قوة الاحتكاك ، v سرعة مركز عطالة المتحرك ، k ، k' ثابتان موجبان .

أرفق بكل علاقة التعبير المناسب من النص عن كل فرضية .

2- للتأكد من صحة الفرضيتين ، تم تسجيل حركة بالونة تسقط في الهواء ، سمح التسجيل بالحصول على سحابة من النقاط تمثل تطور سرعة مركز عطالة البالونة ، في لحظات زمنية معينة (الشكل-1) .

أ) بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، و اعتماد الفرضية المعبر عنها بالعلاقة (f = k v) ، أكتب المعادلة التفاضلية لحركة سقوط البالونة بدلالة :

- (ρ_0) الكتلة الحجمية للهواء .
- (ρ) الكتلة الحجمية للبالونة .
- (m) كتلة البالونة .



- (g) تسارع الجاذبية الأرضية .
- (k) ثابت التناسب .

ب) بين أن المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الشكل : $\frac{dv}{dt} + B\,v = A$ حيث A و B ثابتان .

جـ) اعتمادا على البيان (الشكل-1) . ناقش تطور السرعة (v) و استنتج قيمتها الحدية (v_m) . ماذا يمكن القول عن حركة مركز عطالة البالونة خلال هذا التطور ؟

د) أحسب قيمتي A و B .

3) رسم على نفس المخطط السابق المنحنى $v = f(t)$ وفق قيمتي A و B (المنحنى الممثل بالخط المستمر في الشكل-1) . ناقش صحة الفرضية الأولى .

يعطى : $g = 9.81\ m.s^{-2}$ ، $\rho_0 = 1.3\ kg.m^{-3}$ ، $\rho = 4.1\ kg.m^{-3}$.

أجوبة مختصرة :

1) ▪ العلاقة $f = k\,v$ توافق النص : " قوة الاحتكاك تتناسب طرديا مع السرعة " .
▪ العلاقة $f = k\,v^2$ توافق النص : " قوة الاحتكاك تتناسب طرديا مع مربع السرعة " ،

2- أ) $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g\,(1 - \frac{\rho_0}{\rho})$ ، $A = g\,(1 - \frac{\rho_0}{\rho})$ ، $B = \frac{k}{m}$

جـ) مناقشة تطور السرعة :

- في اللحظة $t = 0$ تكون السرعة معدومة و بعدها تتطور السرعة تدريجيا إلى أن تبلغ قيمة حدية $v_m = 2.5\ m/s$.
- بالنسبة لحركة مركز عطالة البالونة يمكن تمييز ثلاث مراحل :

المرحلة الأولى ($t = 0 \rightarrow t = 0.2\ s$) :

في هذه المرحلة البيان $v = f(t)$ يكون تقريبا عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل : $v = \alpha t$ ، هذا يعني أن حركة البالونة في هذه المرحلة مستقيمة متغيرة متسارعة بانتظام .

المرحلة الثانية ($t = 0.2\ s \rightarrow t = 1.2\ s$) :

في هذه المرحلة يكون البيان $v = f(t)$ عبارة عن خط منحني و يمكن القول أن حركة البالونة في هذه المرحلة متسارعة من دون انتظام .

المرحلة الثالثة ($t > 1.2\ s$) :

في هذه المرحلة تبلغ البالونة سرعة حدية ثابتة و نقول أن حركة البالونة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة .

د- قيمتي A و B :

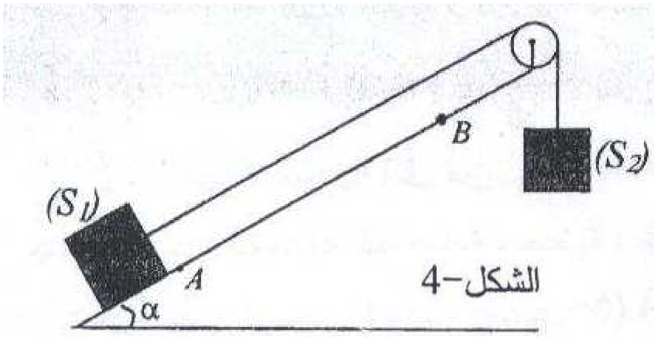
$A = 6.70$ ، $B = 2.68$.

3) نلاحظ أن البيان المرسوم من أجل الفرضية الأولى (سحابة النقط) يكون منطبق مع البيان الحقيقي إلا من أجل القيم الصغيرة للسرعة ($0 < v < 1\ m/s$) ، مما يدل على أن الفرضية الأولى صحيحة في هذا المجال من السرعة ، و بعدها تختل الفرضية إذ أن البيانين لا ينطبقان في هذا المجال الذي يكون فيه $v > 1\ m/s$.

التمرين (3) : (بكالوريا 2011 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 38 على الموقع)

يجر جسم صلب (S_2) كتلته $m_2 = 600\ g$ ، بواسطة خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط يمر على محز بكرة مهملة الكتلة ، عربة (S_1) كتلتها $m_1 = 800\ g$ تتحرك على مستو يميل عل الأفق بزاوية $\alpha = 30°$. في وجود قوى احتكاك $\vec{f}$ شدتها ثابتة و لا تتعلق بسرعة العربة .

في اللحظة $t = 0\ s$ تنطلق العربة من النقطة A دون سرعة ابتدائية ، فتقطع مسافة $AB = x$ ، كما موضح في (الشكل-4) . نأخذ كمبدأ للفواصل النقطة A .



1- أعد رسم (الشكل-4) ، أحص و مثل عليه القوى الخارجية المؤثرة على كل من (S_1) و (S_2) .

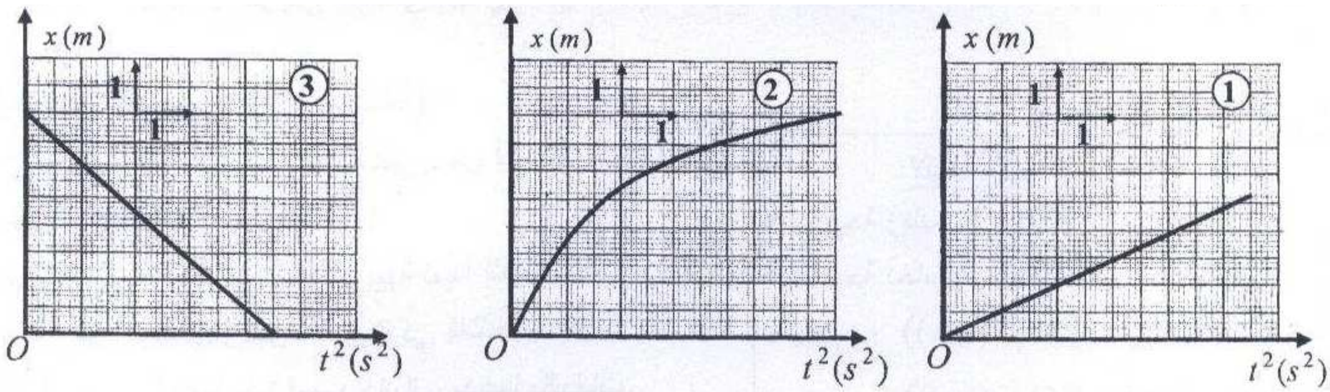
2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على (S_1) و (S_2) .

أ- بين أن المعادلة التفاضلية للفاصلة x تعطى بالعلاقة : $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(m_2 - m_1\sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}$.

ب- استنتج طبيعة حركة الجسم (S_1) .

جـ- باستغلال الشروط الابتدائية أوجد حلا للمعادلة التفاضلية .

3- من أجل قيم مختلفة لـ x كررنا التجربة السابقة عدة مرات فتحصلنا على منحنى بياني يلخص طبيعة حركة الجسم (S_1) .



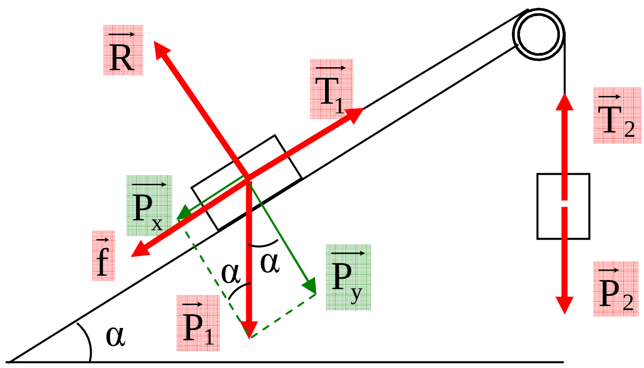
أ- من بين البيانات الثلاثة (1) ، (2) و (3) ما هو البيان الذي يتفق مع الدراسة النظرية السابقة ؟ علل .

ب- احسب من البيان قيمة التسارع a .

جـ- استنتج قيمة كل من قوة الإحتكاك f و توتر الخيط T . علما أن : $g = 9.80\ m.s^{-2}$.

<u>أجوبة مختصرة :</u>

1) <u>تمثيل القوى :</u>



2- أ) $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(m_2 - m_1\sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}$

<u>- طبيعة الحركة :</u>

العبارة السابقة تمثل تسارع حركة كل من الجسمين S_1 ، S_2 و هي تتعلق بمقادير كلها ثابتة مما يدل على أن تسارع الحركة ثابت ، و كون أن مسار كل من الجسمين (S_1) ، (S_2) مستقيم فإن حركة كل منهما مستقيمة متغيرة بانتظام

جـ) $x = \frac{1}{2}(\frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g - \frac{f}{m_1 + m_2}) t^2$

3- أ) من الدراسة النظرية السابقة وجدنا المعادلة المعبرة عن تغيرات x بدلالة الزمن من الشكل : $x = k\,t^2$ حيث k هو ثابت التناسب ، نستنتج من ذلك أن الفاصلة x تتناسب طرديا مع مربع اللحظة الزمنية t و هذا ينطبق على البيان (1) .

ب) $a = 1\ m/s^2$.

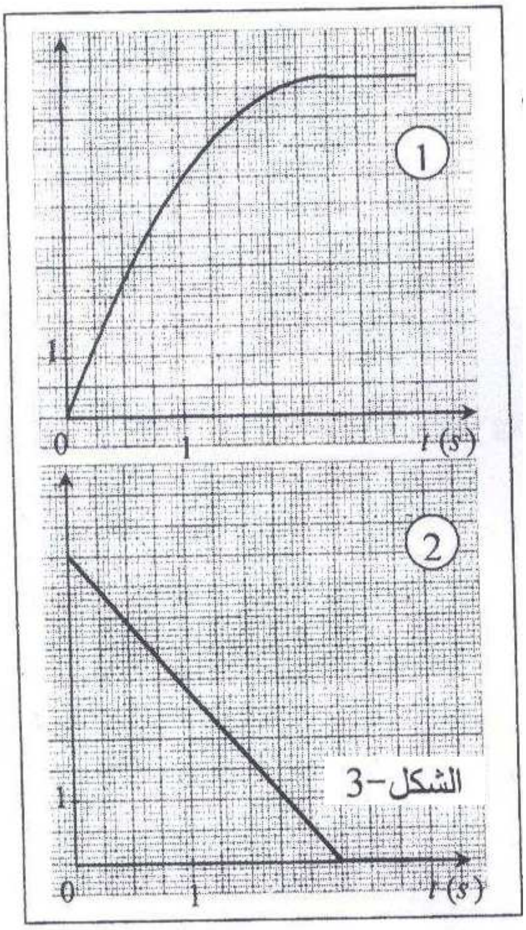
جـ) قيمة قوة الاحتكاك : $f = (m_1 - m_1 \sin\alpha)\,g - (m_1 + m_2)\,a = 0.56\ N$

قيمة التوتر T : $- m_1 g \sin\alpha - f + T = m_1 a = 5.28\ N$ أو $T_2 = m_2 (g - a) = 5.28\ N$

التمرين (4) : (بكالوريا 2011 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 37 على الموقع)

عامل في أحد المخازن ، يدفع صندوقا كتلته m = 20 kg ، على مستوي أفقي إلى أن تبلغ سرعته حدا معينا ، ثم يتركه لحاله ، في لحظة نعتبرها مبدأ لقياس الأزمنة .

اعتبارا من هذه اللحظة ، يتحرك G مركز عطالة الصندوق على مسار مستقيم حتى اللحظة t_1 ، و فق المحور $(O,\vec{i})$. التطور الزمني لكل من الفاصلة $x(t)$ و السرعة $v(t)$ لمركز العطالة G ، المبينين بالمنحنيين (الشكل-3) . نستخدم وحدات النظام الدولي SI .



الشكل-3

1- أ- تعرف على المنحنى البياني الممثل للفاصلة $x(t)$ و المنحنى البياني الممثل للسرعة $v(t)$.

ب- حدد بيانيا قيمة اللحظة t_1 . ماذا يحدث للصندوق عندئذ ؟

2- أرسم مخطط التسارع $a_G(t)$ للنقطة G .

3- أ- مثل القوى الخارجية المؤثرة على الصندوق أثناء الحركة .

ب- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الصندوق ، أوجد شدة قوة الاحتكاك المؤثرة عليه .

4- أ- اكتب المعادلة التفاضلية للسرعة على المحور $(O\ ,\ \vec{i}\ )$ ، و استنتج المعادلة الزمنية $x(t)$ للحركة .

ب- استنتج بيانيا المسافة التي يقطعها مركز عطالة الصندوق بطريقتين مختلفتين .

أجوبة مختصرة :

1- أ) بما أن للصندوق سرعة معينة عند اللحظة t = 0 فهذا يتطابق مع البيان (2) عكس البيان (1) إذن :

البيان (2) ← السرعة v ، البيان (1) ← الفاصلة x .

ب) $t_1 = 2.25\ s$ ، 2) يكون عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، 3- ب) $f = - m\,a = 44.4\ N$.

4- أ) $\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m}$ ، $x = - 1.11\,t^2 + 5\,t$.

ب) طريقة-1 : (من البيان (1) $x(t)$) : $d = \Delta x = x_1 - x_0 = 5.6\ m$

طريقة-2 : (من البيان (2) $v(t)$) : $d = S = \frac{إ \times ق}{2} = 5.6\ m$

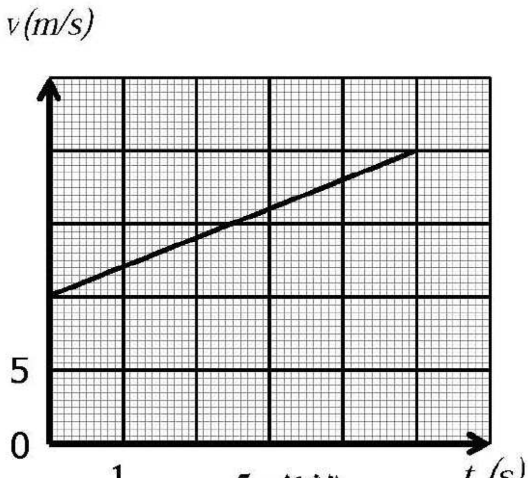
التمرين (5): (بكالوريا 2013 - رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 40 على الموقع)

يعتبر القفز على الخنادق بواسطة الدراجات النارية أحد التحديات التي تواجه المجازفين. إنّ التغلب على هذه التحديات يتطلب التعرف على بعض الشروط التي يجب توفرها لتحقيق هذا التحدي.

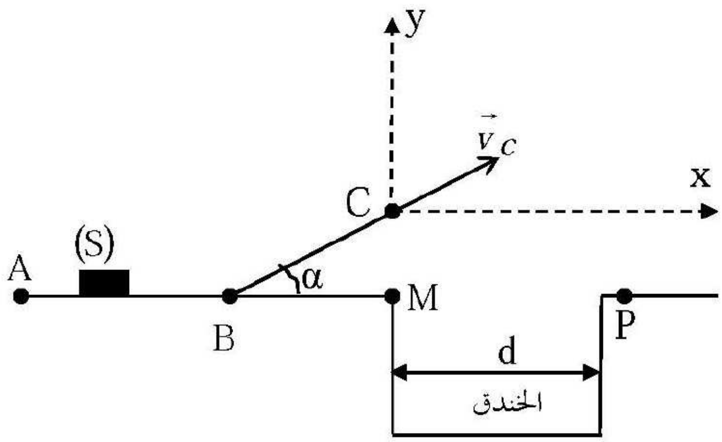
يتكون مسلك المجازفة من قطعة مستقيم أفقية AB، وأخرى BC تميل عن الأفق بزاوية: $\alpha = 10°$، وخندق عرضه d (الشكل-4). ننمذج الجملة (الدراج + الدراجة) بجسم صلب (S) مركز عطالته G وكتلته: $m = 170kg$.

تعطى: $g = 10m/s^2$.

1- تمر الجملة (S) بالنقطة A في اللحظة: $t = 0\ s$ بسرعة: $v_A = 10m/s$، وفي اللحظة: $t_1 = 5s$ تمر من النقطة B بالسرعة v_B. (الشكل-5) يمثّل تغيرات سرعة مركز عطالة الجملة بدلالة الزمن.



الشكل-5



الشكل-4

اعتمادا على البيان: أ- حدّد طبيعة الحركة ، ثمّ استنتج تسارع مركز عطالة الجملة (S).

ب- احسب المسافة المقطوعة AB.

2- تخضع الجملة في الجزء BC لقوة دفع المحرك $\vec{F}$، وقوة احتكاك شدتها: $f = 500N$. القوتان ثابتتان وموازيتان للمسار BC.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِدْ شدة القوة $\vec{F}$ حتى تبقى للجملة (S) نفس قيمة التسارع في الجزء AB.

3- تصل الجملة (S) إلى النقطة C بسرعة: $v_c = 25m/s$ وتغادرها لتسقط في النقطة P.

اعتمادا على البيان: أ− حدّد طبيعة الحركة ، ثمّ استنتج تسارع مركز عطالة الجملة (S).

ب− احسب المسافة المقطوعة AB.

2− تخضع الجملة في الجزء BC لقوة دفع المحرك $\vec{F}$، وقوة احتكاك شدتها: $f = 500N$. القوتان ثابتتان وموازيتان للمسار BC.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِدْ شدة القوة $\vec{F}$ حتى تبقى للجملة (S) نفس قيمة التسارع في الجزء AB.

3− تصل الجملة (S) إلى النقطة C بسرعة: $v_C = 25m/s$ وتغادرها لتسقط في النقطة P.

أ− باعتبار لحظة المغادرة مبدأ للأزمنة، ادرس حركة مركز عطالة الجملة (S) في المعلم (Cx,Cy) ثمّ جِدْ معادلة مسارها.

ب−هل يجتاز الدراج الخندق أم لا ؟ برّر إجابتك، علما أن: $d = 40\ m$ ، و $BC = 56,3\ m$.

<u>أجوبة مختصرة :</u>

1- أ) طبيعة الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام ، $a = 2\ m/s^2$ ،

ب) $AB = 75\ m$ ، 2) $F = m(a + g.\sin\alpha) + f = 1135.2N$ ، 3- أ) $y = \dfrac{-g}{2\,v_0^2.\cos\alpha^2}x^2 \tan\alpha.x$

ب) $MP = 47\ m < d$ ، إذن الدراج يجتاز الخندق .

<u>التمرين (6) :</u> <u>(بكالوريا 2008 – رياضيات) (الحل المفصل : تمرين مقترح 36 على الموقع)</u>

ورد في مطوية أمن الطرق الجدول التالي:

سرعة السيارة $v(km.h^{-1})$	50	80	90	100	110
مسافة الاستجابة $d_1(m)$	14	22	25	28	31
المسافة الموافقة لمدة الكبح $d_2(m)$	14	35	45	55	67

عندما يَهُمُّ (يريد) سائق سيارة تسير بسرعة $(\vec{v})$ بالتوقف، فإن السيارة تقطع مسافة (d_1) خلال مدة (τ_1) قبل أن يضغط السائق على المكابح [تُعرف (τ_1) بزمن استجابة السائق]. وتقطع السيارة مسافة (d_2) خلال مدة (τ_2) زمن مدة الكبح. تسمى (D) مسافة التوقف وتساوي مجموع المسافتين $(d_1،d_2)$: $D = d_1 + d_2$. أثناء عملية الكبح لا يؤثر المحرك على السيارة.

نقوم بدراسة حركة G (مركز عطالة سيارة كتلتها M) على طريق مستقيمة أفقية في مرجع أرضي، نعتبره غاليليا.

1- خلال مدة الاستجابة τ_1، نعتبر المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة على السيارة معدوما.

أ/ ما هي طبيعة حركة مركز عطالة السيارة؟

ب/ استنادا إلى قياسات الجدول أحسب قيم النسب $\dfrac{d_1}{v}$. ما ذا تستنتج؟

جـ/ احسب قيمة المدة τ_1 (مقدرة بالثانية)، من أجل كل قيمة لـ d_1 في الجدول.

2-أ/ ننمذج – خلال عملية الكبح – الأفعال المؤثرة على السيارة بقوى تطبق على مركز عطالتها. نعتبر القوى (قوة الكبح وقوى الاحتكاكات ومقاومة الهواء) المؤثرة على السيارة مكافئة لقوة واحدة $\vec{F}_{f/G}$ ثابتة في القيمة، وجهتها عكس جهة شعاع السرعة.

ب/ لتكن v قيمة سرعة مركز عطالة السيارة في بداية الكبح. أوجد العلاقة الحرفية بين v^2 و d_2 بتطبيق مبدأ إنحفاظ الطاقة.

جـ/ باستعمال الجدول السابق، ارسم المنحنى البياني $v^2 = g(d_2)$.

د/ باستغلال البيان، استنتج قيمة $\vec{F}_{f/G}$.

التمرين (7) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 29 على الموقع)

- نعتبر أن توزع كتلتي الأرض (T) و القمر الإصطناعي (S) ذو تناضر مركزي كروي .
- ينتقل القمر الإصطناعي في مدار دائري حول الأرض ذات نصف القطر R .

1- أرسم شكلا لمدار القمر في مرجع جيو مركزي و مثل قوة التجاذب التي تؤثر بها الأرض على القمر الإصطناعي .

2- يعطى حقل التجاذب الأرض في نقطة M من الفضاء بالعلاقة : $g = G\dfrac{M}{r^2}$.

حيث : M هي كتلة الأرض ، G : ثابت الجذب العام و المقدر بـ $G = 6.67 \,.\, 10^{-11}\ N.m^2/Kg^2$

r : بعد النقطة M من مركز الأرض .

حدد عبارة g بدلالة g_0 (حقل التجاذب على سطح الأرض) و R نصف قطر الأرض و r .

3- أ- طبق القانون الثاني لنيوتن على القمر الإصطناعي في المرجع الجيو مركزي المعتبر غاليليا و عبر عن تسارع مركز عطالة القمر بدلالة g_0 ، R ، r .

ب- لتكن v سرعة القمر على مداره . أعط خصائص شعاع سرعة مركز عطالة القمر الاصطناهي المتحرك بحركة دائرية منتظمة . معبرا عن شدته بدلالة : g_0 ، r ، R .

جـ- عبر عن دور حركة القمر الاصطناعي T بدلالة π ، r ، R ، g_0 .

4- عرف منذ القدم أن $r = 60\ R$ و أن دور القمر $T = 27j\ ,\ 7h\ ,\ 43\ min$. استطاع جان بيكار سنة 1670 بطريقة مثلثية من تحديد قيمة R و المساوية $6370\ Km$ و في سنة 1686 استعمل اسحاق نيوتن هذه النتيجة من أجل تحديد قيمة g_0 ، عبر عن v بدلالة T ، r ثم أوجد قيمة g_0 المحددة من طرف اسحاق نيوتن .

5- قاس كافنديش سنة 1798 قيمة G بواسطة ميزان الفتل فحصل على $G = 6.670 \,.\, 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2$. أحسب كتلة الأرض باستخدام المعطيات : $g_0 = 9.81\ m/s^2$ ، $R = 6370\ Km$.

أجوبة مختصرة :

2) $g = g_0\dfrac{R^2}{r^2}$ ، 3- أ) $a_G = g = g_0\dfrac{R^2}{r^2}$

ب) الحامل : مماسي للمسار الدائري ، الجهة : جهة الحركة ، الشدة : $v = \sqrt{\dfrac{g_0R^2}{r}}$

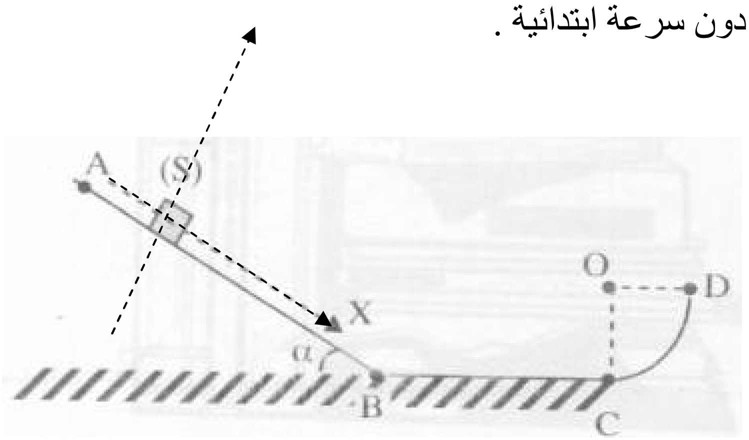
جـ) $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2\, r^3}{g_0R^2}}$ ، 4) $g_0 = \dfrac{4\pi^2\, r^3}{T^2\, R^2} = 9.74\, m/s^2$ ، 5) $M = \dfrac{g_0R^2}{G} = 5.97 \,.10^{24}\ kg$

التمرين (8) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 30 على الموقع)

يتحرك جسم صلب (S) نعتبره نقطيا كتلته $m = 10\ kg$ ، انطلاقا من الموضع A مرورا بالمواضع B ، C ، D التي تقع في مستوي شاقولي (الشكل) حيث :

- (AB) مستوي مائل ، يميل عن المستوي الأفقي (BC) بزاوية α .
- (CD) ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها $R = 8.75\ m$.

ينطلق (S) من الموضع A دون سرعة ابتدائية .



1- يخضع (S) على طول المسار (AB) إلى قوة احتكاك $\vec{f}$ ، و عبارة تسارعه من الشكل :

$$a = 0.5\,g - 2 \quad (m.s^{-2})$$

أ- مثل القوى المطبقة على (S) أثناء انتقاله من الموضع A إلى الموضع B .

ب- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، عين قيمتي كل من α ، f .

2- تهمل كل المقاومات في المسارين (BC) و (CD) : يصل (S) إلى الموضع D بسرعة $v_D = 15\ m.s^{-1}$.

أ- باعتبار الجملة (الجسم (S) + الأرض) ، مثل الحصيلة الطاقوية بين A و B ثم بين B و C و كذلك بين C و D .

ب- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (جسم + أرض) بين الموضعين C و D عين قيمتي سرعة مركز عطالة (S) عند الموضع C . نعتبر المستوي الأفقي المار من الموضع C مرجعا لحساب الطاقة الكامنة الثقالية .

3- يغادر الجسم (S) الموضع D .

أ- ادرس طبيعة حركة (S) بعد مغادرة (S) الموضع D ، و أكتب المعادلتين $v(t)$ ، $z(t)$ ، باعتبار مبدأ الأزمنة لحظة مغادرة الجسم (S) الموضع D .

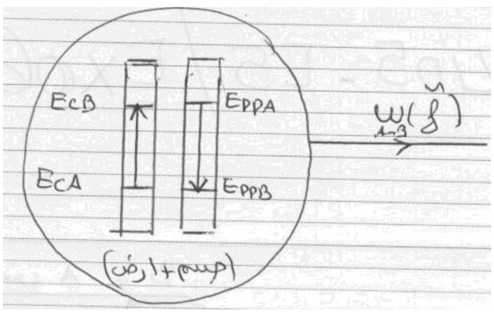
ب- بعد كم من الزمن يعود (S) إلى للموضع D .

أجوبة مختصرة :

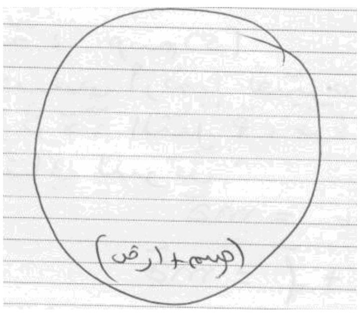
1- ب) $\alpha = 30°$ ، $f = 2\,m = 20\ N$

2- الحصيلة الطاقوية :

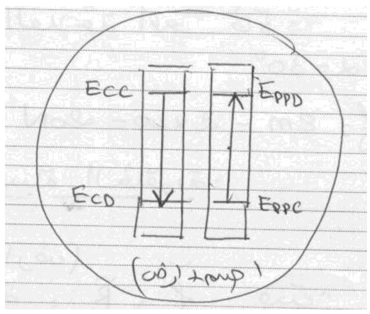
$A \rightarrow B$



$B \rightarrow C$



$C \rightarrow D$



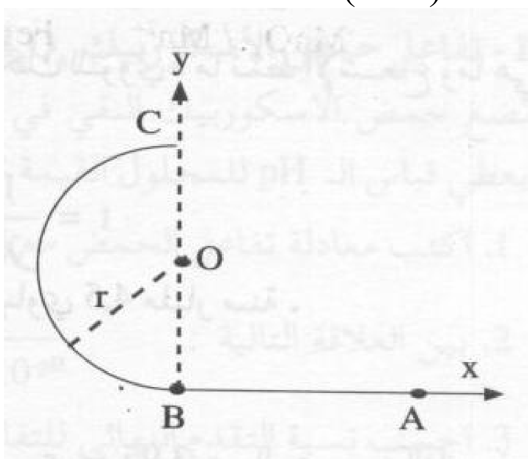
ب) $v_C = \sqrt{v_D^2 + 2gR} = 20\,m/s$.

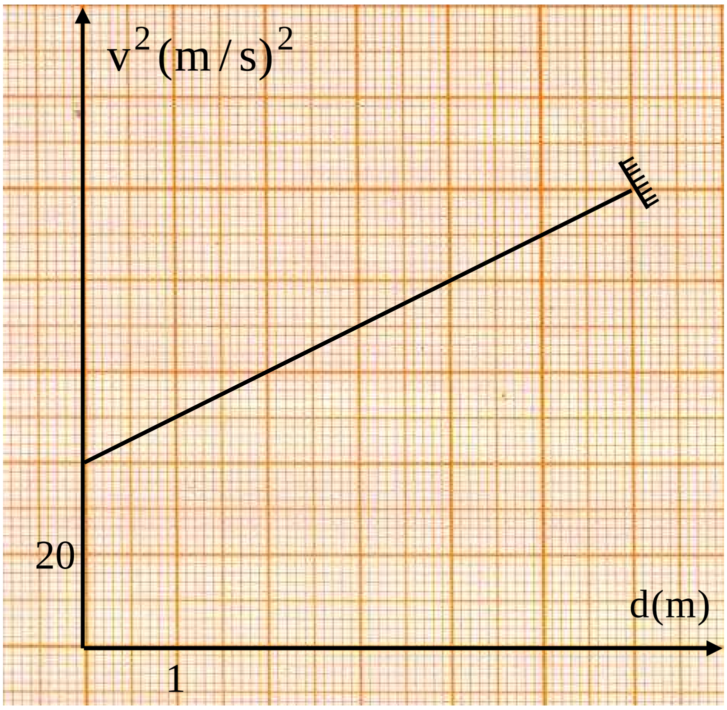
3- أ) $a = -g$ ← طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، $v_B = -gt + v_D$ ، $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_D t$.

ب) $t_D = \frac{2v_D}{g} = 3\,s$.

التمرين (9) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 34 على الموقع)

ينتقل جسم نقطي (S) كتلته $m = 5\ kg$ من موضع A بسرعة ابتدائية v_0 باتجاه موضع B وفق مسار أفقي مستقيم AB ، يخضع على طول هذا الجزء من المسار لقوة محركة أفقية $\vec{F}$ و قوى احتكاك تكافئ قوة وحيدة ثابتة شدتها $f = 20\ N$ ، و عند مروره بالموضع B عند اللحظة $t = 6\ s$ يصادف مسار دائري نصف قطره $R = 2.1\ m$ (الشكل) .





يمثل البيان الموضح في الشكل التالي تغيرات مربع السرعة v^2 بدلالة المسافة المقطوعة d ، بين الموضع A و موضع كيفي M .

1- أكتب العلاقة الرياضية للبيان .

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أدرس طبيعة حركة الجسم (S) على المسار AB .

3- أوجد العلاقة النظرية التي تعبر عن v^2 بدلالة d .

4- بمقارنة العلاقتين السابقتين ، أوجد :

- قيمة v_0 ، سرعة الجسم النقطي (S) عند مروره بالموضع A .
- قيمة F شدة القوة المحركة .

5- بتطبيق مبدا انحفاظ الطاقة على الجملة (جسم + أرض) ، أوجد قيمة السرعة v_C عند الموضع C .

نعتبر المستوي الأفقي AB مرجعا لحساب الطاقة الكامنة الثقالية . يعطى : $g = 10\ m/s^2$.

أجوبة مختصرة :

1) $v^2 = A\,d + B$ ، حيث $A = 10$ هو ميل المنحنى (المستقيم) ، $B = 40$ قيمة v^2 من أجل $d = 0$.

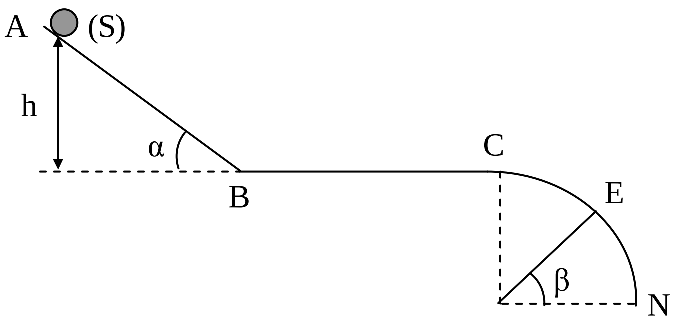
2) $a = \dfrac{F - f}{m}$ ← طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

3) $v^2 = \dfrac{2(F - f)}{m} d + v_0^2$ ، 4) $F = \dfrac{Am + 2f}{2} = 4.5\ N$ ، $v_B = 10\ m/s$.

5) $v_C = \sqrt{v_B^2 - 4g.R} = 4\ m/s$

التمرين (10) : (بكالوريا 2003 - علوم دقيقة) (الحل المفصل : تمرين مقترح 41 على الموقع)

ينزلق جسم صلب (S) يمكن اعتباره نقطيا كتلته $m = 0.1\ kg$ ، على طريق ABCN (أنظر الشكل أدناه) .



• AB منحدر ، تقع (A) على ارتفاع " h " من المستوي الأفقي المار من (B) طوله $AB = 10\ m$.
• BC طريق أفقي طوله $22.75\ m$.
• CN طريق على شكل ربع دائرة مركزها (o) و نصف قطرها $R = 3\ m$ ، تقع على مستوي شاقولي . تهمل كل قوى الإحتكاك على هذا الجزء من المسار . يعطى : $g = 10\ m/s^2$

1- ينطلق الجسم (S) من النقطة (A) دون سرعة ابتدائية ليصل إلى (B) بسرعة $v_B = 10\ m/s$ ، بفرض قوى الإحتكاك مهملة:
أ- أوجد الارتفاع الذي هبط منه الجسم .
ب- ما هي طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) عند انتقاله من (A) إلى (B) ؟
جـ- أحسب تسارع هذه الحركة إن وجد .
2- يواصل الجسم (S) حركته على الجزء (BC) في وجود قوة احتكاك شدتها ثابتة .
أ- أرسم القوى الخارجية المطبقة على الجسم (S) على الجزء من هذا المسار ؟
ب- أحسب شدة قوة الإحتكاك إذا علمت أن السرعة في (C) هي $v_C = 3\ m/s$.
3- يغادر الجسم (S) المسار الدائري في النقطة (M) حيث $\widehat{NoE} = \beta$.
أ- أوجد عبارة سرعة الجسم (S) في النقطة M بدلالة β ، g ، r.
ب- أوجد قيمة الزاوية β .

أجوبة مختصرة :

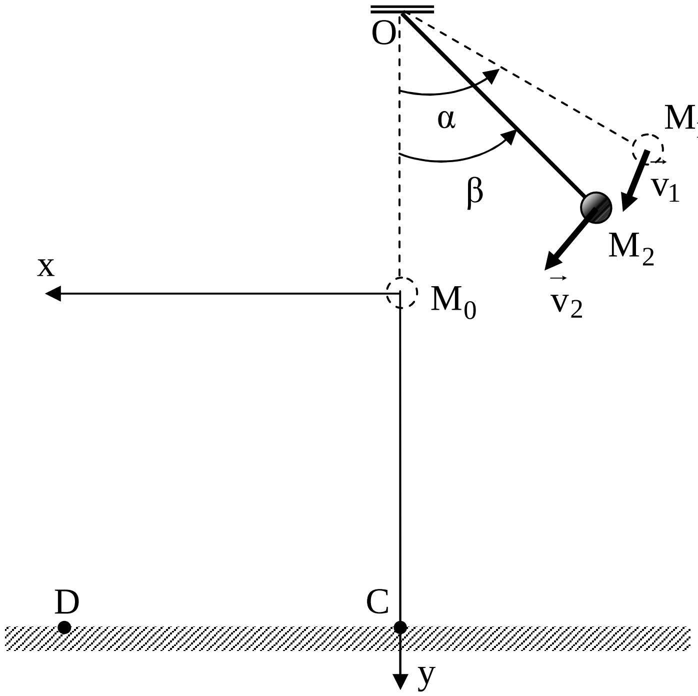
1- أ) $h = \dfrac{v_b^2}{2g} = 5\ m$ ، ب) $a = g.\sin\alpha$ ← طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، جـ) $a = 5\ m/s$

2- ب) $f = \dfrac{m(v_b^2 - v_C^2)}{2BC} = 0.2\ N$ ، 3- أ) $v_M = \sqrt{v_C^2 + 2gr\,(1 - \sin\beta)}$ ،

ب) $= 0.77 \quad \sin\beta = \dfrac{v_C{}^2 + 2gr}{3gr}$ ← $\beta = 50°$.

التمرين (11) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 43 على الموقع)

يتكون نواس بسيط من كرية نعتبرها نقطية كتلتها $m = 100\ g$ معلقة بواسطة خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط ، طوله $\ell = 0.5\ m$ ، يزاح النواس عن وضع توازنه المستقر بزاوية $\alpha = 60°$ ، ثم تدفع الكرية بسرعة $v_1 = 2\ m/s$ حاملها عمودي على الخيط و يقع في المستوي الشاقولي الذي يحتوي على (OM_0) (الشكل) .



1- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (كرية) بين اللحظتين t_1 ، t_2 الموافقتين للوضعين (M_1) ، (M_2) أوجد عبارة سرعة الكرية v_2 عند الموضع M_2 يعبر عنها بالعلاقة التالية ثم أحسب قيمتها من أجل $\beta = 30°$:

$$v_2 = \sqrt{v_1{}^2 + 2g\ell\,(\cos\beta - \cos\alpha)}$$

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد عبارة شدة توتر الخيط T في الوضع M_2 بدلالة m ، g ، v_2 ، β ثم احسب T من أجل $\beta = 30^0$.

3- أحسب سرعة الكرية v_0 لحظة مرورها بوضع التوازن (M_0) .

4- في اللحظة التي تصل فيها الكرية إلى النقطة (M_0) ينقطع الخيط فتواصل الكرة حركتها و تسقط على الأرض عند النقطة (D) (الشكل) .

أ- أدرس طبيعة حركة الكرية بعد انقطاع الخيط في المعلم $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ و اكتب المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ ، $y(t)$ ، ثم معادلة المسار $y(x)$ ، نعتبر مبدأ الأزمنة لحظة انقطاع الخيط عند الموضع M_0 .

ب- أحسب المسافة (CD) علما أن $M_0C = 1.25\ m$.

يعطى : $\cos 30° = 0.86$ ، $g = 10\ m/s^2$

أجوبة مختصرة :

1) $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g\ell\,(\cos\beta - \cos\alpha)} = 2.76\ m/s$ ، 2) $T = m.g.\cos\beta + \frac{m v_A^2}{\ell} = 2.4\ N$

3) $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g\ell\,(\cos\beta - \cos\alpha)}$ ، $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g\ell\,(1 - \cos 60°)} = 3\ m/s$

4- أ) - مسقط حركة الكرة على المحور (ox) هي حركة مستقيمة منتظمة .

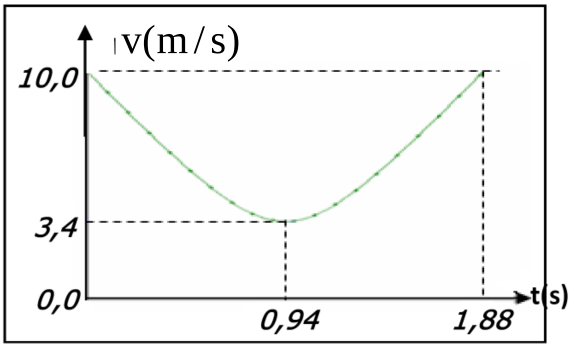
- مسقط حركة الكرة على المحور (oy) هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

$v_x(t) = v_0$ ، $v_y(t) = g.t$ ، $x = v_0 t$ ، $y = \frac{1}{2} g\,t^2$ ، $y = \frac{g}{2v_0^2} g\,t^2$ ، ب) $CD = 1.5\ m$

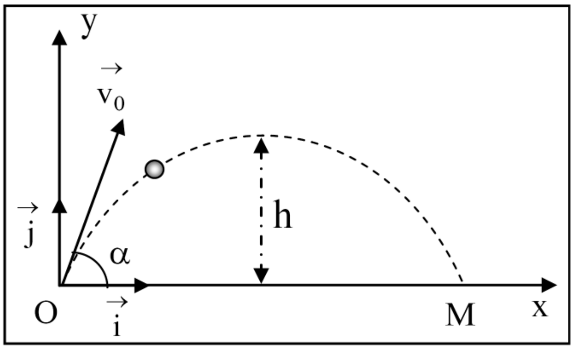
التمرين (12) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 45 على الموقع)

نقذف جسم صلب (S) ، كتلته m و مركز عطالته G ، بسرعة ابتدائية v_0 يصنع شعاعها الزاوية α مع المحور ox كما مبين على (الشكل-1) . نهمل كل من مقاومة الهواء و دافعة أرخميدس .

يمثل (الشكل-2) تغيرات قيمة سرعة القذيفة بدلالة الزمن .



-02-الشكل



-01-الشكل

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أدرس طبيعة حركة الجسم (S) على المحورين ox ، oy .

2- أوجد من البيان :

أ- قيمة v_0 .

ب- قيمتي v_{0x} مركبة شعاع السرعة $\vec{v}_0$ على المحور ox .

3- استنتج قيمة كل من الزاوية α الذي قذف بها الجسم (S) و قيمة v_{0y} مركبة شعاع السرعة $\vec{v}_0$ على المحور oy .

4- مثل بشكل كيفي المنحنيين $v_x(t)$ ، $v_y(t)$ في المجال الزمني $(0 \le v_0 \le 1.88\ s)$.

5- استنتج من المنحنيين السابقين المسافة الأفقية OM و الذروة h .

يعطى : $\cos 70° = 0.34$ ، $\sin 70° = 0.94$.

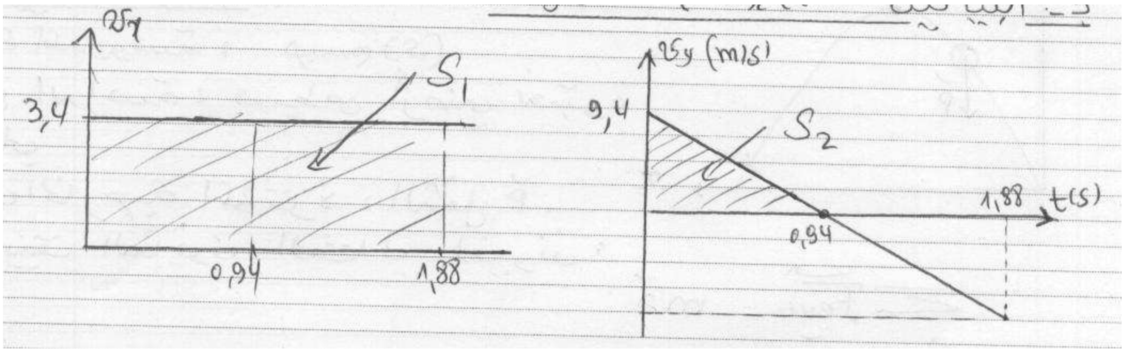
أجوبة مختصرة :

1) - مسقط حركة الكرة على المحور (ox) هي حركة مستقيمة منتظمة .

- مسقط حركة الكرة على المحور (oy) هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- أ) $v_0 = 10\ m/s$ ، ب) $v_{0x} = 10\ m/s$ ، 3) $\alpha = 37°$. $v_{0y} = v_0\ \sin\alpha = 9.4\ m/s$

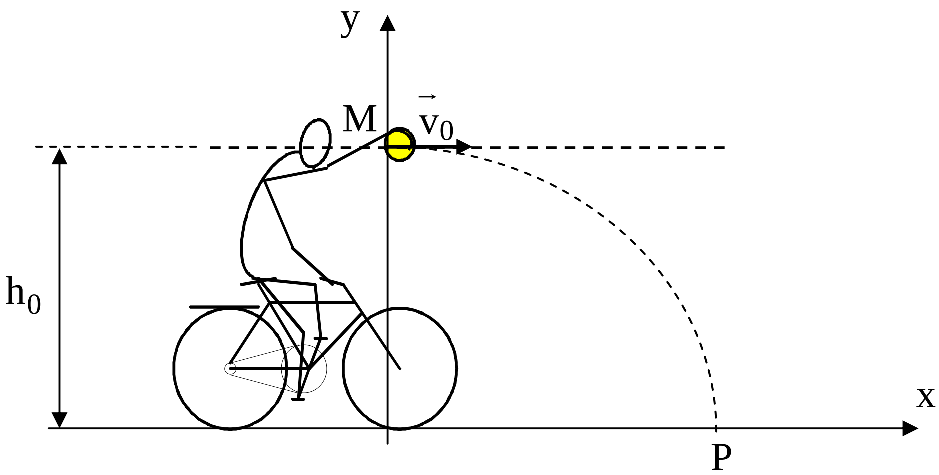
4) المنحنيين $v_x(t)$ ، $v_y(t)$:



5) $OM = 6.40\ m$ ، $h = 4.42\ m$.

التمرين (13) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 44 على الموقع)

من موضع M ، ترك دراج كرة تنس كتلتها m تسقط في اللحظة $t = 0$ من نقطة ترتفع عن سطح الأرض بمقدار $h_0 = 1.\ 8\ m$ و هو يتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بسرعة $v = 2\ m.s^{-1}$ ، بالنسبة لمرجع سطحي أرضي منسوب إليه معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ متعامد و باعتبار مقاومة الهواء مهملة و $g = 10\ m.s^{-2}$.



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن . أدرس طبيعة حركة الكرة .

2- عين خصائص شعاع السرعة الإبتدائية $\vec{v}_0$ للكرة .

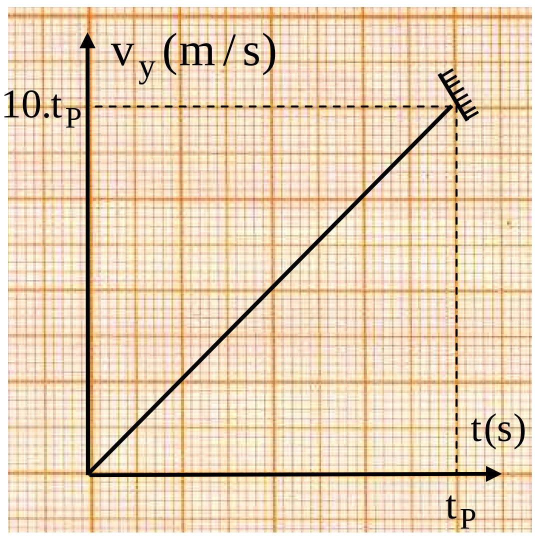
3- أوجد المعادلات الزمنية للحركة ثم استنتج معادلة المسار $y = f(x)$

4- اعتمادا على المنحنى $v_y(t)$ المقابل أوجد t_P لحظة وصول الكرة إلى الأرض في الموضع P .

5- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (كرة + أرض) ، بين أن عبارة سرعة الكرة عند وصولها لسطح الأرض تعطى بالعبارة :

$$v_P = \sqrt{{v_0}^2 + 2\,g.h_0}$$

- نعتبر المستوي الأفقي المار من P مرجعا لحساب الطاقة الكامنة الثقالية .



أجوبة مختصرة :

1) - مسقط حركة الكرة على المحور (ox) هي حركة مستقيمة منتظمة .
- مسقط حركة الكرة على المحور (oy) هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

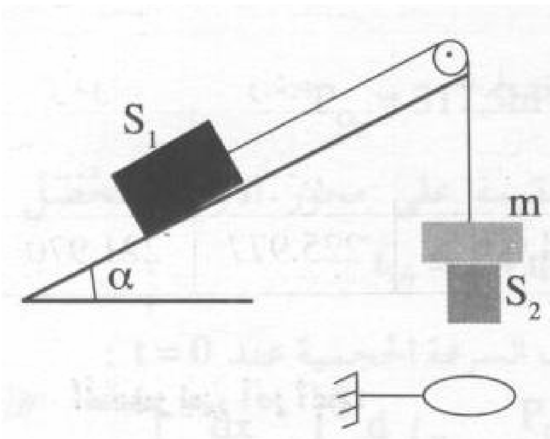
2) نقطة التأثير : موضع ترك الكرة ، الجهة : جهة حركة الدراج ، الطويلة : سرعة الدراج $v_0 = 2\ m/s$.

3) $v_x = v_0$ ، $v_y = -gt$ ، $x = v_0(t)$ ، $y = -\frac{1}{2}g\,t^2 + h_0$ ، $y = -\frac{g}{2v_0{}^2}x^2 + h_0$

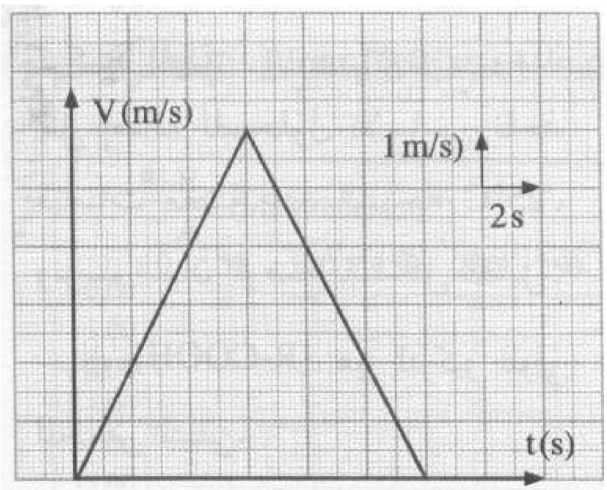
4) $t_P = \sqrt{\frac{h_0}{5}} = 0.6\ s$.

التمرين (14) : (الحل المفصل : تمرين مقترح 46 على الموقع)

ينزل جسم صلب (S_1) كتلته $m_1 = 1.1\ kg$ بدون احتكاك على مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30°$ ، يربط هذا الجسم بخيط عديم الامتطاط و مهمل الكتلة ، يمر على محز بكرة مهملة الكتلة و تدور حول محورها الأفقي بدون احتكاك . يربط الطرف الثاني للخيط بجسم صلب S_2 كتلته m_2 يتحرك شاقوليا و يحمل كتلة إضافية مجنحة m كما مبين في الشكل المقابل :



تترك الجملة دون سرعة ابتدائية ، و عند مرور الجسم (S_2) عبر الحلقة تحجز هذه الأخيرة الكتلة m و تواصل الجملة حركتها من دون الكتلة m . البيان المرفق يمثل تغيرات السرعة اللحظية للجسم (S_1) بدلالة الزمن .



1- بالاعتماد على البيان أوجد في كل طور :
- طبيعة حركة الجسم (S_1) .
- تسارع الجسم (S_1) .
- المسافة الكلية التي يقطعها الجسم (S_1) .

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد العبارة الحرفية لتسارع الجسم (S_1) في كل طور .

3- بالاعتماد على الدراسة البيانية و النظرية أوجد كتلة كل من الجسم (S_2) و الكتلة الإضافية m .

يعطى : $g = 10\ m/s^2$.

أجوبة مختصرة :

1) الطور I ← الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام ، $a_1 = 1\ m/s^2$ ، $d_1 = 18\ m$.

الطور II ← الحركة مستقيمة متباطئة بانتظام ، $a_2 = -1\ m/s^2$ ، $d_2 = 18\ m$.

2) الطور I ← $a_1 = \dfrac{(m_2 + m)\, g\ -\ m_1 g.\sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3}$ ، الطور II ← $a_1 = \dfrac{m_2\, g\ -\ m_1 g.\sin\alpha}{m_1 + m_2}$

3) $m_2 = \dfrac{-\, m_1 g.\sin\alpha - m_1 a_2}{a_2 - g} = 0.4\ kg$ ، $m = \dfrac{m_2 g - m_1 g.\sin\alpha - (m_1 + m_2) g}{a_1 - g} = 0.33\ kgg$